



Nº47 2023

Annali d'Italia

Annali d'Italia
Scientific Journal of Italy

ISSN 3572-2436

Annali d'Italia (Italy's scientific journal) is a peer-reviewed European journal covering top themes and problems in various fields of science.

The journal offers authors the opportunity to make their research accessible to everyone, opening their work to a wider audience.

Chief editor: Cecilia Di Giovanni

Managing editor: Giorgio Bini

- Hoch Andreas MD, Ph.D, Professor Department of Operative Surgery and Clinical Anatomy (Munich, Germany)
- Nelson Barnard Ph.D (Historical Sciences), Professor (Malmö, Sweden)
- Roberto Lucia Ph.D (Biological Sciences), Department Molecular Biology and Biotechnology (Florence, Italy)
- Havlíčková Tereza Ph.D (Technical Science), Professor, Faculty of Mechatronics and Interdisciplinary Engineering Studies (Liberec, Czech Republic)
- Testa Vito Ph.D, Professor, Department of Physical and Mathematical management methods (Rome, Italy)
- Koshelev Andrey Candidate of Philological Sciences, Associate Professor, Faculty of Philology and Journalism (Kiev, Ukraine)
- Nikonorov Petr Doctor of Law, Professor, Department of Criminal Law (Moscow, Russia)
- Bonnet Nathalie Ph.D (Pedagogical Sciences), Faculty of Education and Psychology (Lille, France)
- Rubio David Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Barcelona, Spain)
- Dziedzic Stanisław Ph.D, Professor, Faculty of Social Sciences (Warsaw, Poland)
- Hauer Bertold Ph.D (Economics), Professor, Department of Economics (Salzburg, Austria)
- Szczepańska Janina Ph.D, Department of Chemistry (Wrocław, Poland)
- Fomichev Vladimir Candidate of Pharmaceutical Sciences, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)
- Tkachenko Oleg Doctor of Psychology, Associate Professor (Kiev, Ukraine)

and other experts

500 copies

Annali d'Italia

50134, Via Carlo Pisacane, 10, Florence, Italy

email: info@anditalia.com

site: <https://www.anditalia.com/>

CONTENT

ECONOMIC SCIENCES

Sadigov I.M. SOME MODELS OF PRICE REGULATION OF NATURAL MONOPOLIES	3	Zakoyan H.V. LIQUIDITY MANAGEMENT POLICY IN COMMERCIAL BANKS	17
---	---	---	----

JURISPRUDENCE

Choporova O. UN AND OTHER ORGANIZATIONS ON WAY OF CONTEMPORARY UKRAINIAN ENVIRONMENTAL PROTECTION.....	24
--	----

MATHEMATICAL SCIENCES

Sadygov M.A. PROPERTIES OF THE BISUBDIFFERENTIAL OF BICONVEX FUNCTIONS.....	28
--	----

PEDAGOGICAL SCIENCES

Abdullayeva M.I. ORGANIZATIONAL AND PEDAGOGICAL ASPECTS OF THE DEVELOPMENT OF SANOGENIC THINKING IN STUDENTS ..42		Lobanchuk V. CONTEMPORARY THEATRICAL ART IN THE EDUCATIONAL ACTIVITY OF A TEACHER	46
--	--	--	----

PHILOLOGICAL SCIENCES

Orazbek M.S., Sagynadin G.S., Sagidulliyeva S.S. THE IMAGE OF A DOLL IN FOREIGN AND KAZAKH LITERATURE	49
--	----

ECONOMIC SCIENCES

SOME MODELS OF PRICE REGULATION OF NATURAL MONOPOLIES

Sadigov Ilqar Misraddin oglu

research assistant,

Institute of Economics

[DOI: 10.5281/zenodo.8364888](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364888)

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ЦЕНОВОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ МОНОПОЛИЙ

Садыгов Игар Мисраддин оглы

научный сотрудник,

Институт Экономики

Abstract

The paper considers the problem of finding the maximum of the social welfare function under the condition that the firm breaks even, the price is non-negative, and the average profit of the firm is non-negative. The paper also considers optimization models of a two-part tariff for products and services of natural monopolies.

Аннотация

В работе рассматривается задача нахождения максимума функции общественного благосостояния при условии безубыточности фирмы, неотрицательности цены и неотрицательности средней прибыли фирмы. В работе также рассмотрены оптимизационные модели двухстакнового тарифа на продукцию и услуги естественных монополий.

Keywords: tariff, firm, product, model, optimization, price.

Ключевые слова: тариф, фирма, продукт, модель, оптимизация, цена.

1. Введение

Регулируемые цены как инструмент государственной политики, проводимой в отношении отрасли, предназначены для достижения определенных целей управления этой отраслью. Основными целями управления являются высокая степень экономической эффективности и реализация общественных интересов, связанных с производством и распределением производимого продукта. Поэтому цены, найденные путем решения задачи оптимизации функционирования отрасли по критерию, предполагающему достижение основных целей управления, называют «эффективными».

В работе рассматривается задача нахождения максимума функции общественного благосостояния при условии безубыточности фирмы, неотрицательности цены и неотрицательности средней прибыли фирмы.

При одноставочном тарифе расходы потребителя представляют собой линейную функцию от объема потребления $R(Q) = P \times Q$, поэтому одноставочные тарифы называют также линейными тарифами. Общие затраты покупателя при линейных тарифах пропорциональны количеству купленной продукции. Цены Рамсея являются линейными ценами, максимизирующими функцию общественного благосостояния при условии безубыточности естественной монополии.

Многоставочные тарифы включают в себя плату за подключение к сети (или плату за право пользования услугой) и последовательность ставок, зависящих от объема потребления.

Наиболее простым нелинейным тарифом является двухстакновый тариф, включающий в себя плату за подключение ϵ и ставку (предельную цену) P за каждую единицу приобретенного продукта.

Рассмотрим сначала определение функции общественного благосостояния для однопродуктовой естественной монополии. Пусть $Q(p)$ – функция спроса на продукт, производимый естественной монополией; $P(q)$ – обратная функция спроса; $C(q)$ – функция совокупных издержек естественной монополии. Совокупный потребительский излишек при объеме потребления Q определим как разность между максимальной ценой, которую потребители готовы были заплатить за товар и действительной ценой товара $P(Q)$, проинтегрированную по всем единицам приобретенного товара:

$$S(Q) = \int_0^Q (P(q) - P(Q)) dq = \int_0^Q P(q) dq - P(Q)Q. \quad (1.1)$$

Прибыль монополиста $\Pi(Q)$ может быть вычислена как разность дохода $R(Q)$ и валовых издержек $C(Q)$:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - C(Q). \quad (1.2)$$

Функцию общественного благосостояния определим как совокупный выигрыш всех участников рынка, то есть сумму потребительского излишка $S(Q)$ и прибыли монополиста $\Pi(Q)$:

$$W(Q) = S(Q) + \Pi(Q).$$

Учитывая соотношения (1.1) и (1.2), функцию общественного благосостояния можно представить в виде:

$$W(Q) = \int_0^Q P(q)dq - C(Q). \quad (1.3)$$

Цены, максимизирующие функцию общественного благосостояния, в экономической теории называются эффективными ценами, а соответствующее им ценообразование - первым наилучшим решением. Необходимым условием максимизации функции общественного благосостояния является равенство цены предельным издержкам: $P(Q) = MC(Q)$. В этом легко убедиться, проанализировав равенство (1.3) по переменной Q .

Известно, что именно такие цены, равные предельным издержкам, обеспечиваются конкурентным рынком и соответствуют Парето-эффективности производства и потребления продукции.

В отличие от известных работ, в статье учтены условия неотрицательности цены и неотрицательности средней прибыли фирмы и исследована модель оптимизации тарифов. В работе также рассматриваются обобщения модели тарифной оптимизации, которые изучаются в [1]-[3]. Модели тарифной оптимизации также рассматриваются в [4]-[8]. Обычно становятся известной нижняя и верхняя граница тарифа в экономике. Поэтому в работе рассмотрен случай $P \in [a_1, b_1]$ и $\varepsilon \in [a_2, b_2]$, где $b_1 > a_1 \geq 0$ и $b_2 > a_2 \geq 0$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Работа является продолжением работы автора [8].

Работа состоит из четырех пунктов. В пункте 1 дано краткое изложение работы. В пункте 2 исследована общая модель оптимизации двухстакового тарифа. В пункте 3 изучается оптимационная модель двухстакового тарифа. В пункте 4 исследована модель оптимизации двухстакового тарифа (частный случай).

2. Оптимационная модель двухстакового тарифа (общий случай)

Наиболее простым нелинейным тарифом является двухстаковый тариф, включающий в себя плату за подключение ε и постоянную ставку (предельную цену) P за каждую единицу приобретенного продукта.

Введем следующие обозначения (см.[2]): $Q(P, \theta)$ - функция спроса на продукт естественных монополий (ЕМ), зависящая от значения переменной вкуса θ (если, в частности, может быть доход потребителя); $\rho(Q, \theta)$ - обратная функция спроса; $g(x)$ - плотность распределения переменной вкуса θ ; $G(x)$ - функция распределения переменной вкуса θ ; θ_{\max} - наибольшее возможное значение переменной вкуса θ ; $C(Q)$ - функция издержек ЕМ; $MC(Q)$ - функция предельных издержек ЕМ; $\theta_0 = \theta_0(P, \varepsilon)$ - предельный тип покупателей (покупатели этого типа имеют нулевой излишек при тарифе (P, ε)).

В оптимационных моделях используется определенный критерий оптимизации, обычно таким критерием является значение функции общественного благосостояния, которая позволяет учитывать в формализованном виде интересы всех участников рынка.

Средний потребительский излишек при двухстаковом тарифе (P, ε) задается формулой (см. [2])

$$S(P, \varepsilon) = \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \left(\int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq - PQ(P, x) - \varepsilon \right) g(x) dx.$$

Обозначим $S(P, \varepsilon, x) = \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq - PQ(P, x) - \varepsilon$. Считаем, что

$$S(P, \varepsilon, \theta_0(P, \varepsilon)) = \int_0^{\theta_0(P, \varepsilon)} \rho(q, \theta_0(P, \varepsilon)) dq - PQ(P, \theta_0(P, \varepsilon)) - \varepsilon = 0.$$

Средняя прибыль ЕМ составит

$$\Pi(P, \varepsilon) = \bar{Q}P - C(\bar{Q}) + \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))),$$

где $\bar{Q} = \bar{Q}(P, \varepsilon) = \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx$ - величина среднего спроса при двухстаковом тарифе (P, ε) .

Обычно нижняя и верхняя граница тарифа в экономике становится известной. Поэтому целесообразно изучить случай $P \in [a_1, b_1]$ и $\varepsilon \in [a_2, b_2]$, где $b_1 > a_1 \geq 0$ и $b_2 > a_2 \geq 0$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Рассматривается задача нахождения наибольшего значения функции общественного благосостояния $W(P, \varepsilon) = S(P, \varepsilon) + \Pi(P, \varepsilon)$ при условии $\Pi(P, \varepsilon) \geq 0$:

$$\max_{P \in [a_1, b_1], \varepsilon \in [a_2, b_2]} W(P, \varepsilon),$$

$$\Pi(P, \varepsilon) \geq 0.$$

Рассмотрим эквивалентную задачу

$$\begin{aligned} \min_{P \in [a_1, b_1], \varepsilon \in [a_2, b_2]} & \left\{ \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + \right. \\ & \left. + C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \right) \right\}, \\ & C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Построим обобщенную функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda_0, \lambda) = & \lambda_0 \left\{ \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + \right. \\ & \left. + C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right\} + \lambda \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda \geq 0$ (см. [9, с.129]). Отметим, что без ограничения общности будем считать $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = 1$. Из экономических соображений следует, что можно положить $\lambda_0 = 1$, т.е. предположим, что задача (2.1) является регулярной. Тогда для задачи (2.1) функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \right. \\ & \left. - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) + \lambda \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx + \\ & + (1 + \lambda) \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$.

Пусть функции $C(z)$ и $G(x)$ непрерывно дифференцируемы при $z \geq 0$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$ соответственно, частная производная $\frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)$ непрерывна при $P \in [a_1, b_1]$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$, $Q(P, x)$, $\rho(q, x)$ и $g(x)$ непрерывные функции при $P \in [a_1, b_1]$, $q \geq 0$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$, $\theta_0(P, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема при $P \in [a_1, b_1]$, $\varepsilon \in [a_2, b_2]$. Считаем, что $0 \leq \theta_0(P, \varepsilon) \leq \theta_{\max}$ при $P \in [a_1, b_1]$, $\varepsilon \in [a_2, b_2]$.

Вычислим частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) = & -(PQ(P, \theta_0(P, \varepsilon))) - \int_0^{Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))} \rho(q, \theta_0(P, \varepsilon)) dq + \varepsilon g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} + \\ & + \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (Q(P, x) + P \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) - \rho(Q(P, x), x) \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)) g(x) dx + \\ & + (1 + \lambda) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) \right) \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right] - \right. \\ & \left. - \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + P \cdot (Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} - \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx) + \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) = & -(PQ(P, \theta_0(P, \varepsilon))) - \int_0^{\theta_{\max}(P, \theta_0(P, \varepsilon))} \rho(q, \theta_0(P, \varepsilon)) dq + \varepsilon g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x) dx + \\ & + (1+\lambda) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) (-Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}) \right) + \right. \\ & \left. + P \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right\}, \\ \text{Tак как } \rho(Q(P, x), x) = P \text{ и } S(P, \varepsilon, \theta_0(P, \varepsilon)) = \int_0^{\theta_{\max}(P, \theta_0(P, \varepsilon))} \rho(q, \theta_0(P, \varepsilon)) dq - PQ(P, \theta_0(P, \varepsilon)) - \varepsilon = 0 \text{ (см. [3])}, \text{ то} \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) = & (1+\lambda) \left(\left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \cdot \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right] + \right. \\ & \left. + (1+\lambda) \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \left. + (1+\lambda) \left(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right\}. \end{aligned}$$

По теореме 4.2.1 (принцип Лагранжа) и лемме 4.2.1[9, с.130, с.131] имеем, что для решения (P, ε) задачи (2.1) выполняется система:

$$\frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : P \in (a_1, b_1), \\ \geq 0 : P = a_1, \\ \leq 0 : P = b_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : \varepsilon \in (a_2, b_2), \\ \geq 0 : \varepsilon = a_2, \\ \leq 0 : \varepsilon = b_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

и выполняется равенство

$$\lambda \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) = 0.$$

Теперь, вообще говоря, необходимо составить девять систем путем попарного комбинирования соотношений из (2.2), (2.3). Затем требуется найти решения каждой такой системы и каким-то образом исследовать их на оптимальность.

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$. Из соотношения (2.2), (2.3) следует, что если (P, ε) является решением системы, то

$$\begin{aligned} & (1+\lambda) \left(\left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \cdot \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right] + \right. \\ & \left. + (1+\lambda) \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx = 0, \right. \\ & \left. \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \right. \\ & \left. + (1+\lambda) \left(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) = 0, \right. \\ & \left. \lambda \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) = 0. \right. \end{aligned}$$

Поэтому, если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$ решение задачи (2.1) и $\lambda > 0$, то (P, ε) является решением системы

$$(1+\lambda) \left(\left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \cdot \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right] = \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - (1 + \lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P}, \\
&(1 + \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \right) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) = \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + \\
&\quad + (1 + \lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon)))), \\
&C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \neq 0$ и

$Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \neq 0$, то

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \right) = \frac{\lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - (1 + \lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P}}{(1 + \lambda) \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right]}, \\
&\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \right) = \frac{\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + (1 + \lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))))}{(1 + \lambda) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}, \\
&C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - (1 + \lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P}}{(1 + \lambda) \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right]} = \\
&= \frac{\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + (1 + \lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))))}{(1 + \lambda) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 0$. Тогда если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$ решение задачи (2.1), то (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \right) = \frac{-\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P}}{\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P}}, \\
&\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \right) = \frac{\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - 1 + G(\theta_0(P, \varepsilon))}{Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}, \\
&C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = a_2$. Из соотношения (2.2), (2.3) следует, что если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = a_2$ решение задачи (2.1), то (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned}
& (1+\lambda)((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}] + \\
& + (1+\lambda)a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx = 0, \\
& \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon}) + \\
& + (1+\lambda)(a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P,a_2))) \geq 0, \\
& \lambda(C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - a_2(1-G(\theta_0(P,a_2))) = 0.
\end{aligned}$$

Если $\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P} \neq 0$ и $\lambda > 0$, то отсюда следует, что

если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = a_2$ решение задачи (2.1), то P и λ является решением системы

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{\lambda \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - (1+\lambda)a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}}{(1+\lambda)[\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}]}, \\
& (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon} - \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - \\
& - (1+\lambda)(a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P,a_2)))) \leq 0, \\
& C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - a_2(1-G(\theta_0(P,a_2))) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 0$. Тогда если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = a_2$ решение задачи (2.1), то P является решением системы

$$\begin{aligned}
& ((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}]) = \\
& = -a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}, \\
& (\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon} - \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - \\
& - a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial \varepsilon} + (1-G(\theta_0(P,a_2))) \leq 0, \\
& C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - a_2(1-G(\theta_0(P,a_2))) \leq 0.
\end{aligned}$$

Если $[\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}] \neq 0$, то отсюда следует, что

$$((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{-a_2 \frac{\partial G(\theta_0(P,a_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}}{\int_{\theta_0(P,a_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,a_2))g(\theta_0(P,a_2)) \frac{\partial \theta_0(P,a_2)}{\partial P}}.$$

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = b_2$. Из соотношения (2.2), (2.3) следует, что если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = b_2$ решение задачи (2.1), то P и λ является решением системы

$$(1+\lambda)((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,b_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,b_2))g(\theta_0(P,b_2)) \frac{\partial \theta_0(P,b_2)}{\partial P}] +$$

$$\begin{aligned}
& + (1+\lambda)b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx = 0, \\
& \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \cdot Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon}) + \\
& + (1+\lambda)(b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P, b_2)))) \leq 0, \\
& \lambda(C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1-G(\theta_0(P, \varepsilon)))) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = b_2$ решение задачи (2.1), $\lambda > 0$ и $\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P} \neq 0$, то P и λ является решением системы

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) = \frac{\lambda \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - (1+\lambda)b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P}}{(1+\lambda)[\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P}]}, \\
& \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \cdot Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon}) + \\
& + (1+\lambda)(b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P, b_2)))) \leq 0. \\
& C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1-G(\theta_0(P, \varepsilon))) = 0.
\end{aligned}$$

Также получим, что если $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = b_2$ решение задачи (2.1), $\lambda = 0$ и $\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P} \neq 0$, то P является решением системы

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) = \frac{-b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P}}{\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial P}}, \\
& \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \cdot Q(P, \theta_0(P, b_2))g(\theta_0(P, b_2)) \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon}) + \\
& + b_2 \frac{\partial G(\theta_0(P, b_2))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, b_2)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P, b_2))) \leq 0, \\
& C(\int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - P) \int_{\theta_0(P, b_2)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1-G(\theta_0(P, \varepsilon))) \leq 0.
\end{aligned}$$

Случаи $P = a_1$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$; $P = b_1$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$; $P = a_1$ и $\varepsilon = a_2$; $P = b_1$ и $\varepsilon = a_2$; $P = a_1$ и $\varepsilon = b_2$, $P = b_1$ и $\varepsilon = b_2$ исследуются аналогичным образом.

3. Оптимизационная модель двухставочного тарифа

Пусть $S(P, \varepsilon, x) = \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x)dq - PQ(P, x) - \varepsilon$, $S(P, \varepsilon) = \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (\int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x)dq - PQ(P, x) - \varepsilon)g(x)dx$,

$\Pi(P, \varepsilon) = \bar{Q}P - C(\bar{Q}) + \varepsilon(1-G(\theta_0(P, \varepsilon)))$, где $\bar{Q} = \bar{Q}(P, \varepsilon) = \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx$ - величина среднего

спроса при двухставочном тарифе (P, ε) .

Считаем, что

$$S(P, \varepsilon, \theta_0(P, \varepsilon)) = \int_0^{Q(P, \theta_0(P, \varepsilon))} \rho(q, \theta_0(P, \varepsilon))dq - PQ(P, \theta_0(P, \varepsilon)) - \varepsilon = 0.$$

Рассматривается задача нахождения наибольшего значения функции общественного благосостояния $W(P, \varepsilon) = S(P, \varepsilon) + \Pi(P, \varepsilon)$ при условии $\Pi(P, \varepsilon) \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \max_{P \geq 0, \varepsilon \geq 0} W(P, \varepsilon), \\ & \Pi(P, \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим эквивалентную задачу

$$\begin{aligned} & \min_{P \geq 0, \varepsilon \geq 0} \left\{ \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + \right. \\ & \quad \left. + C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right\}, \\ & C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из п.2 следует, что для задачи (3.1) функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon) g(x) dx + \\ & + (1 + \lambda) \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$.

Пусть функции $C(z)$ и $G(x)$ непрерывно дифференцируемы при $z \geq 0$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$ соответственно, частная производная $\frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)$ непрерывна при $P \geq 0$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$, $Q(P, x)$, $\rho(q, x)$ и $g(x)$ непрерывные функции при $P \geq 0$, $q \geq 0$ и $x \in [0, \theta_{\max}]$, $\theta_0(P, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема при $P \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$. Считаем, что $0 \leq \theta_0(P, \varepsilon) \leq \theta_{\max}$ при $P \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Из п.2 следует, что частные производные функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) = & (1 + \lambda) \left(\left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \right) \right) \cdot \left[\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} \right] + \right. \\ & \left. + (1 + \lambda) \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1 + \lambda) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \right) \right) \cdot Q(P, \theta_0(P, \varepsilon)) g(\theta_0(P, \varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \right. \\ & \left. + (1 + \lambda) \left(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P, \varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right\}. \end{aligned}$$

По теореме 4.2.1 (принцип Лагранжа) и лемме 4.2.1 [9, с.130, с.131] имеем, что для решения (P, ε) задачи (3.1) выполняется система:

$$\frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : P > 0, \\ \geq 0 : P = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : \varepsilon > 0, \\ \geq 0 : \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

и выполняется равенство

$$\lambda \left(C \left(\int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - P \int_{\theta_0(P, \varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1 - G(\theta_0(P, \varepsilon))) \right) \right) = 0.$$

Теперь, вообще говоря, необходимо составить четыре систем путем попарного комбинирования соотношений из (3.2), (3.3). Затем требуется найти решения каждой такой системы и каким-то образом исследовать их на оптимальность.

Пусть $P > 0$ и $\varepsilon > 0$. Из соотношения (3.2), (3.3) следует, что если $P > 0$ и $\varepsilon > 0$ решение задачи (3.1), то (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned}
& (1+\lambda)((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}] + \\
& + (1+\lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P} - \lambda \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx = 0, \\
& \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \\
& + (1+\lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P,\varepsilon)))) = 0, \\
& \lambda(C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - \varepsilon(1-G(\theta_0(P,\varepsilon)))) = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому, если $P > 0$ и $\varepsilon > 0$ решение задачи (3.1) и $\lambda > 0$, то (P, ε) и λ является решением системы

$$\begin{aligned}
& (1+\lambda)((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}] = \\
& = \lambda \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - (1+\lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}, \\
& (1+\lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) \cdot Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + \\
& + (1+\lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P,\varepsilon)))), \\
& C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - \varepsilon(1-G(\theta_0(P,\varepsilon))) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P} \neq 0$ и

$Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \neq 0$, то

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{\lambda \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - (1+\lambda)\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}}{(1+\lambda)[\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}]}, \\
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + (1+\lambda)(\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - (1-G(\theta_0(P,\varepsilon))))}{(1+\lambda) \cdot Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}}, \\
& C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - \varepsilon(1-G(\theta_0(P,\varepsilon))) = 0.
\end{aligned}$$

Также получим, что если $P > 0$ и $\varepsilon > 0$ решение задачи (3.1) и $\lambda = 0$, то (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{-\varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}}{\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P,x)g(x)dx - Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial P}}, \\
& \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P) = \frac{\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} g(x)dx + \varepsilon \frac{\partial G(\theta_0(P,\varepsilon))}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - 1 + G(\theta_0(P,\varepsilon))}{Q(P,\theta_0(P,\varepsilon))g(\theta_0(P,\varepsilon)) \frac{\partial \theta_0(P,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}}, \\
& C(\int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - P \int_{\theta_0(P,\varepsilon)}^{\theta_{\max}} Q(P,x)g(x)dx - \varepsilon(1-G(\theta_0(P,\varepsilon))) \leq 0.
\end{aligned}$$

Пусть $P > 0$ и $\varepsilon = 0$. Из соотношения (3.2), (3.3) следует, что если $P > 0$ и $\varepsilon = 0$ решение задачи (3.1), то P и λ является решением системы

$$(1 + \lambda)((\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial P}] -$$

$$-\lambda \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx = 0,$$

$$\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1 + \lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P) \cdot Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial \varepsilon} -$$

$$-(1 + \lambda)(1 - G(\theta_0(P,0))) \geq 0,$$

$$\lambda(C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) = 0.$$

$$\text{Обозначив } \eta(P) = -\frac{P \cdot [\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial P}]}{\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx} \text{ и } \frac{\lambda}{1 + \lambda} = k \text{ отсюда}$$

получим, что

$$\frac{1}{P} \cdot (P - \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx)) = \frac{k}{\eta(P)},$$

$\eta(P)$ коэффициент, или модуль ценовой эластичности спроса на продукт.

Таким образом, получим, что если $P > 0$, $\varepsilon = 0$ и $\lambda > 0$, то тариф P и λ является решением системы

$$\frac{P - \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx)}{P} = \frac{k}{\eta(P)},$$

$$\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1 + \lambda)(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P) \cdot Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial \varepsilon} -$$

$$-(1 + \lambda)(1 - G(\theta_0(P,0))) \geq 0,$$

$$C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx = 0.$$

Также получим, что если $P > 0$ и $\varepsilon = 0$ решение задачи (3.1) и $\lambda = 0$, то P является решением системы

$$(\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P) \cdot [\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial P}] = 0,$$

$$\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (\frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P) \cdot Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial \varepsilon} - (1 - G(\theta_0(P,0))) \geq 0,$$

$$C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx \leq 0.$$

Если $[\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - Q(P, \theta_0(P,0))g(\theta_0(P,0))\frac{\partial \theta_0(P,0)}{\partial P}] \neq 0$, то отсюда следует, что

$$P = \frac{\partial}{\partial Q} C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx), \quad \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} g(x)dx - 1 + G(\theta_0(P,0)) \geq 0,$$

$$C(\int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx) - P \int_{\theta_0(P,0)}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx \leq 0.$$

Случай $P = 0$ и $\varepsilon = 0$; $P = 0$ и $\varepsilon > 0$ исследуются аналогичным образом.

4. Оптимизационная модель двухставочного (частные случаи)

Обычно нижняя и верхняя граница тарифа в экономике становится известной. Поэтому целесообразно изучить случай $P \in [a_1, b_1]$ и $\varepsilon \in [a_2, b_2]$, где $b_1 > a_1 \geq 0$ и $b_2 > a_2 \geq 0$, $b_1 \leq +\infty$, $b_2 \leq +\infty$.

Если $b_1 = +\infty$ (или $b_2 = +\infty$), то считаем, $P \in [a_1, +\infty)$ (или $\varepsilon \in [a_2, +\infty)$).

Для простоты считаем, что $\theta_0 = \theta_0(P, \varepsilon)$ постоянное неотрицательное число, т.е. $\theta_0 = \theta_0(P, \varepsilon)$ не зависит от переменной (P, ε) .

Средний потребительский излишек при двухставочном тарифе (P, ε) задается формулой (см. [2])

$$S(P, \varepsilon) = \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \left(\int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq - PQ(P, x) - \varepsilon g(x) dx \right).$$

Средняя прибыль ЕМ составит

$$\Pi(P, \varepsilon) = \bar{Q}P - C(\bar{Q}) + \varepsilon(1 - G(\theta_0)),$$

где $\bar{Q} = \bar{Q}(P) = \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx$ - величина среднего спроса при тарифе P .

Рассматривается задача нахождения наибольшего значения функции общественного благосостояния $W(P, \varepsilon) = S(P, \varepsilon) + \Pi(P, \varepsilon)$ при условии $\Pi(P, \varepsilon) \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \max_{P \in [a_1, b_1], \varepsilon \in [a_2, b_2]} W(P, \varepsilon), \\ & \Pi(P, \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим эквивалентную задачу

$$\begin{aligned} & \min_{P \in [a_1, b_1], \varepsilon \in [a_2, b_2]} \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon g(x) dx - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + \right. \\ & \quad \left. + C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - \varepsilon(1 - G(\theta_0))) \right\}, \\ & C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Построим обобщенную функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda_0, \lambda) = & \lambda_0 \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon g(x) dx - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + \right. \\ & \quad \left. + C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - \varepsilon(1 - G(\theta_0))) \right\} + \lambda \left(C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_0 \geq 0, \lambda \geq 0$ (см. [9, с.129]). Отметим, что без ограничения общности будем считать $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = 1$. Из экономических соображений следует, что можно положить $\lambda_0 = 1$. Тогда для задачи (3.1) функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon g(x) dx - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx + C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - \\ & - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) + \lambda \left(C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \right)), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} L(P, \varepsilon, \lambda) = & \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} (PQ(P, x) - \int_0^{Q(P, x)} \rho(q, x) dq + \varepsilon g(x) dx + \\ & + (1 + \lambda) \left(C(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) \right)), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$.

Отметим, что относительно переменных ε функция $L(P, \varepsilon, \lambda)$ линейна.

Пусть функция $C(z)$ непрерывно дифференцируема при $z \geq 0$, частная производная $\frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)$ непрерывна при $P \geq 0$ и $x \in [\theta_0, \theta_{\max}]$, $Q(P, x)$, $\rho(q, x)$ и $g(x)$ непрерывные функции при $P \geq 0$, $q \geq 0$ и $x \in [\theta_0, \theta_{\max}]$. Считаем, что $0 \leq \theta_0 < \theta_{\max}$.

Вычислим частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) = \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} (Q(P, x) + P \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) - \rho(Q(P, x), x) \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)) g(x) dx +$$

$$+ (1+\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \right) - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda)(1-G(\theta_0)).$$

Так как $\rho(Q(P, x), x) = P$, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) &= (1+\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \right) - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx, \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) &= \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda)(1-G(\theta_0)). \end{aligned}$$

Тогда по теореме 4.2.1 (принцип Лагранжа) и лемме 4.2.1[9, с.130, с.131] имеем, что для решения (P, ε) задачи (4.1) выполняется система:

$$\frac{\partial}{\partial P} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : P \in (a_1, b_1), \\ \geq 0 : P = a_1, \\ \leq 0 : P = b_1 \neq +\infty \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(P, \varepsilon, \lambda) \begin{cases} = 0 : \varepsilon \in (a_2, b_2), \\ \geq 0 : \varepsilon = a_2, \\ \leq 0 : \varepsilon = b_2 \neq +\infty \end{cases} \quad (4.3)$$

и выполняется равенство

$$\lambda \left(C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1-G(\theta_0)) \right) = 0.$$

Теперь, вообще говоря, необходимо составить девять систем путем попарного комбинирования соотношений из (4.2), (4.3). Затем требуется найти решения каждой такой системы и каким-то образом исследовать их на оптимальность.

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$. Из соотношения (4.2), (4.3) следует, что если (P, ε) является решением задачи (4.1), то выполняются равенства

$$\begin{aligned} (1+\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \right) - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx &= 0, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda)(1-G(\theta_0)) &= 0, \\ \lambda \left(C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1-G(\theta_0)) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\lambda > 0$, то (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned} (1+\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \right) - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx &= 0, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1+\lambda)(1-G(\theta_0)) &= 0, \\ C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon (1-G(\theta_0)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда из (4.4) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx}{\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx}.$$

Обозначив $\eta(P) = -\left(P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \right)$, получим, что

$$\frac{1}{P} \cdot \left(P - \frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) \right) = \frac{k}{\eta(P)},$$

$\eta(P)$ коэффициент, или модуль ценовой эластичности спроса на продукт.

Таким образом, получим, что если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon \in (a_2, b_2)$ и $\lambda > 0$, то двухставочный тариф (P, ε) и λ является решением системы

$$\begin{aligned} \frac{P - \frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right)}{P} &= \frac{k}{\eta(P)}, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1 + \lambda)(1 - G(\theta_0)) &= 0, \\ C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) &= 0. \end{aligned}$$

Если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon \in (a_2, b_2)$ и $\lambda = 0$, то двухставочный тариф (P, ε) является решением системы

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx &= 0, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - 1 + G(\theta_0) &= 0, \\ C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - \varepsilon(1 - G(\theta_0)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Если $\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \neq 0$, то отсюда следует, что $P = \frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right)$.

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = a_2$ решение задачи (4.1). Тогда P и λ являются решением системы

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \right) \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx &= 0, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1 + \lambda)(1 - G(\theta_0)) &\geq 0, \\ \lambda \left(C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - a_2(1 - G(\theta_0)) \right) &= 0. \end{aligned}$$

$$P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx$$

Отсюда следует, что если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon = a_2$ и $\lambda > 0$, то обозначив $\eta(P) = -\frac{\theta_0}{\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx}$ и

$\frac{\lambda}{1 + \lambda} = k$ получим, что P и λ являются решением системы

$$\begin{aligned} \frac{P - \frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right)}{P} &= \frac{k}{\eta(P)}, \\ \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - (1 + \lambda)(1 - G(\theta_0)) &\geq 0, \\ C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx - a_2(1 - G(\theta_0)) &= 0. \end{aligned}$$

Если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon = a_2$ решение задачи (4.1), $\lambda = 0$ и $\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x) g(x) dx \neq 0$, то $k = 0$ и

$P = \frac{\partial}{\partial Q} C \left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x) g(x) dx \right)$. Кроме того, выполняются соотношения

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x) dx - 1 + G(\theta_0) \geq 0,$$

$$C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - a_2(1 - G(\theta_0)) \leq 0.$$

Пусть $P \in (a_1, b_1)$ и $\varepsilon = b_2 \neq +\infty$ решение задачи (4.1). Тогда P и λ являются решением системы

$$(1+\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial Q} C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right) - P\right) \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx = 0,$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(1 - G(\theta_0)) \leq 0,$$

$$\lambda(C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1 - G(\theta_0))) = 0.$$

Отсюда следует, что если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon = b_2 \neq +\infty$ и $\lambda > 0$, то обозначив

$$\eta(P) = -\frac{P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx}{\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx} \text{ и } \frac{\lambda}{1+\lambda} = k \text{ получим, что } P \text{ и } \lambda \text{ являются решением системы}$$

$$\frac{P - \frac{\partial}{\partial Q} C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right)}{P} = \frac{k}{\eta(P)},$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x)dx - (1+\lambda)(1 - G(\theta_0)) \leq 0,$$

$$C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1 - G(\theta_0)) = 0.$$

Если $P \in (a_1, b_1)$, $\varepsilon = b_2 \neq +\infty$ решение задачи (4.1), $\lambda = 0$ и $\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} \frac{\partial}{\partial P} Q(P, x)g(x)dx \neq 0$, то $k = 0$ и

$$P = \frac{\partial}{\partial Q} C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right). \text{ Кроме того, выполняются соотношения}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} g(x)dx - 1 + G(\theta_0) \leq 0,$$

$$C\left(\int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx\right) - P \int_{\theta_0}^{\theta_{\max}} Q(P, x)g(x)dx - b_2(1 - G(\theta_0)) \leq 0.$$

Случай $P = a_1$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$; $P = b_1$ и $\varepsilon \in (a_2, b_2)$; $P = a_1$ и $\varepsilon = a_2$; $P = b_1$ и $\varepsilon = a_2$; $P = a_1$ и $\varepsilon = b_2$, $P = b_1$ и $\varepsilon = b_2$ исследуются аналогичным образом. Заметим, что если $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$, то задача (4.1) упрощается.

Литература

1. Богачкова Л.Ю. Совершенствование управления отраслями Российской энергетики: теоретические предпосылки, практика, моделирование. - Волгоградское научное издательство, 2007.- 421 с.
2. Зайцева Ю. В. Оптимационные модели ценообразования в естественной монополии. // Автограферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук. Москва, 2003.- 26 с.
3. Зайцева Ю.В. Математические модели ценообразования в естественной монополии. - Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2006. - 117 с.
4. Чернавский С.Я. Реформы регулируемых отраслей российской энергетики. - М.: Нестор-История, 2013. - 328 с.
5. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности. - Экономическая школа, 1996.- 745 с.
6. Brown, S., Sibley D. The theory of public utility pricing. // Cambridge University Press, USA, 1986. P. 39-44.
7. Садыгов И.М. Об оптимизации тарифов на электроэнергию. // Annali d'Italia, 2023, №46, С.11-23.
8. Садыгов И.М. Оптимизационная модель двухставочного тарифа. // The scientific heritage, 2023, №120.
9. Сухарев А.Г., Тимохов А.Ф., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. -М.: Наука, 1986.- 326с.

LIQUIDITY MANAGEMENT POLICY IN COMMERCIAL BANKS

Zakoyan Harutyun Varazdatovich

Yerevan State University

Faculty of Economics and Management

Department of Management and Business,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,

g. Yerevan, Republic of Armenia

ORCID: 0009-0004-5666-2617

[DOI: 10.5281/zenodo.8364895](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364895)

ПОЛИТИКА УПРАВЛЕНИЯ ЛИКВИДНОСТЬЮ В КОММЕРЧЕСКИХ БАНКАХ

Закоян Арutyн Вараздатович

Ереванский Государственный Университет

Факультет экономики и управления

Кафедра менеджмента и бизнеса,

Кандидат технических наук, доцент,

г. Ереван, Республика Армения

ORCID: 0009-0004-5666-2617

Abstract

The Policy has been developed in order to organize and coordinate the efforts aimed at establishing and maintaining a system of the liquidity management in commercial banks (hereafter *the bank*). Implementation of all the regulations of the Policy will enable to create an up-to-date system of liquidity management which will ensure a stronger control over the level of liquidity risk undertaken by the bank, as well as to improve the quality of the liquidity risk management.

Аннотация

Политика разработана с целью организации и координации работ по созданию и поддержанию системы управления ликвидностью в коммерческих банках. Реализация всех положений политики обеспечит создание современной системы управления ею, что позволит усилить контроль за уровнем устанавливающего коммерческими банками риска ликвидности, а также повысить качество процессов управления им.

Keywords: Liquidity management processes, stress testing, liquidity buffer, risk appetite, recovery plan.

Ключевые слова: Процессы управления ликвидностью, стресс-тестирование, буфер ликвидности, аппетит к риску, план самооздоровления.

Политика управления ликвидностью в коммерческих банках (далее, соответственно, - "Политика" и "Банк") определяет (1):

- цели и задачи управления ликвидностью и риском ликвидности Банка,
- основные процессы управления ликвидностью,
- основные принципы, используемые Банком в процессе управления ликвидностью и риском ликвидности,
- распределение функций органов управления, коллегиальных органов и подразделений в процессе управления ликвидностью и риском ликвидности.

Политика разработана с целью создания условий для организации процессов управления ликвидностью, а также обеспечения эффективной взаимосвязи процессов управления ликвидностью с процессами (2):

- финансового планирования,
- управления рисками и экономическим капиталом,
- разработки, ценообразования и реализации клиентам банковских продуктов.

Политика описывает взаимосвязь указанных и других процессов Банка с процессами управления ликвидностью. Детальное описание данных процессов подлежит раскрытию во внутренних нормативных документах Банка.

Принципы и процессы управления ликвидностью, осуществляемые посредством Политики, направлены на обеспечение финансовой устойчивости Банка в стрессовых ситуациях, а также на достижение стратегических целей, увеличение прибыли и капитализации Банка, удовлетворение потребностей клиентов и требований акционеров Банка.

Задачами управления ликвидностью являются:

- обеспечение текущей платежеспособности Банка и обслуживание платежного оборота клиентов в любой из валют, в которых Банк проводит операции,
- предотвращение возникновения дефицита/избытка ликвидности в любой из валют, в которых Банк проводит операции,
- обеспечение способности Банка фондировать активы в необходимом объеме,

- соблюдение нормативных требований ЦБ страны в сфере управления и контроля за состоянием ликвидности;
- своевременное предоставление полной и достоверной информации руководству Банка, необходимой для принятий управленческих решений, в том числе влияющих на состояние ликвидности Банка.
- сохранение деловой репутации Банка.

Политика является основным документом, определяющим систему управления ликвидностью и риском ликвидности Банка. Принципы и требования настоящей Политики подлежат раскрытию и детализации во внутренних нормативных документах: положениях, инструкциях, порядках и методиках по вопросам управления ликвидностью. Разработка иных внутренних нормативных документов Банка по управлению ликвидностью осуществляется в соответствии с Политикой. Банк осуществляет управление ликвидностью с различными горизонтами: долгосрочной - выше трех месяцев, среднесрочной - до 3 месяцев, краткосрочной - до 30 дней.

Управление ликвидностью (4) осуществляется путем реализации следующих процессов:

- планирование долгосрочной и среднесрочной ликвидности,
- ежедневное управление краткосрочной ликвидностью,
- управление ресурсной базой,
- стресс-тестирование ликвидности,
- формирование буфера ликвидности в объеме, необходимом для поддержания устойчивости Банка в случае внепланового (в том числе стрессового) развития ситуации,
- управление риском ликвидности,
- разработка и актуализация плана самооздоровления.

Управление долгосрочной ликвидностью осуществляется в рамках процесса финансового планирования, целью которого является обеспечение реализации утвержденной стратегии Банка и стратегических планов по отдельным направлениям деятельности, с учетом текущих показателей деятельности Банка. В процессе финансового планирования устанавливаются плановые объемные и финансовые показатели деятельности Банка, горизонт же финансового планирования составляет не менее одного года. Детализация плановых показателей деятельности Банка, в том числе целевых объемных показателей активов и пассивов, а также принципов и процедур подготовки и утверждения финансового плана подлежат раскрытию в соответствующих отдельных внутренних нормативных документах Банка.

Управление среднесрочной ликвидностью осуществляется в процессе оперативного планирования активов и пассивов, целью которого является координация текущей деятельности бизнес-подразделений по привлечению и размещению ресурсов в объемах и на сроки, обеспечивающие финансовую устойчивость Банка, с учетом текущих и прогнозируемых рыночных условий. В рамках оперативного

планирования для привлекающих и размещающих ресурсы подразделений устанавливаются взаимосвязанные плановые задания, определяющие значения целевых показателей, в том числе:

- по объему активов, формируемых операциями подразделения,
- по объему пассивов, формируемым операциями подразделения,
- по структуре срочности активов и пассивов.

Плановые задания для привлекающих и размещающих ресурсы подразделений, определяющие значения целевых показателей устанавливаются в том числе с учетом валют и финансовых инструментов.

Разработка плановых заданий осуществляется с учетом:

- целевых показателей стратегии Банка и годового финансового плана;
- текущего макроэкономического прогноза Банка;
- текущего состояния активов и пассивов, их объемов, доходности и сроков погашения;
- отдельных параметров реализуемых крупнейших сделок и проектов;
- результатов статистического анализа и моделирования динамики показателей активов и пассивов и поведения клиентов, в том числе, по досрочному погашению, пролонгации активов и пассивов, параметрам новых сделок и остаткам на счетах до востребования;
- экспертных оценок руководителей бизнес-направлений по возможностям дальнейшего развития бизнеса и изменению рыночной конъюнктуры;
- прогнозов динамики финансовых рынков;
- требований по максимизации чистого процентного дохода и процентной маржи;
- результатов стресс-тестирования и установленных Банком внутренних ограничений на показатели риска ликвидности, процентного, валютного и ценового риска.

Целевые показатели плановых заданий устанавливаются таким образом, чтобы при их выполнении на горизонте оперативного планирования обеспечивалось выполнение следующих условий:

- прогнозируемые на горизонте оперативного планирования краткосрочные разрывы ликвидности могут быть закрыты операциями на финансовых рынках, в том числе за счет использования буфера ликвидности;
- выполнение установленных в соответствии с политикой внутренних ограничений на показатели риска ликвидности и сигнальных значений на установленные ЦБ нормативы ликвидности.

Оперативный план управления активами и пассивами включает:

- устанавливаемые плановые задания для подразделений,
- планируемые отдельные мероприятия по управлению активами и пассивами, ожидаемые результаты их реализации.

Оперативный план управления активами и пассивами утверждается на горизонт оперативного планирования, составляющий не менее трех месяцев, и пересматривается (уточняется) не реже, чем ежемесячно.

Для обеспечения способности Банка своевременно и в обязательном порядке выполнять все свои обязательства перед клиентами и контрагентами, в случае отклонения фактических объемов привлечения и размещения ресурсов от плановых значений и/или развития ситуации по стрессовому сценарию, Банк формирует и поддерживает в необходимом объеме буфер ликвидности. Банк также проводит регулярный мониторинг выполнения плановых заданий и фактического состояния структуры активов и пассивов. В процессе мониторинга выполнения плановых заданий и структуры активов и пассивов осуществляется сопоставление плановых и фактических значений показателей структуры баланса и показателей ликвидности, выявляются причины несоответствий и определяются основные факторы, оказывающие наибольшее влияние на значения соответствующих показателей. В случае существенных отклонений фактических значений показателей структуры баланса от плановых значений, а также нарушения внутренних ограничений на показатели риска ликвидности или сигнальных значений на установленные ЦБ страны нормативы ликвидности, Банк разрабатывает мероприятия по предотвращению нарушения нормативов ЦБ и внутренних ограничений на показатели риска ликвидности и, при необходимости, разрабатывает и утверждает новый оперативный план во внеочередном порядке.

Детализация принципов и процедур подготовки и утверждения оперативного плана управления активами и пассивами подлежит раскрытию в соответствующих отдельных внутренних нормативных документах Банка.

Задачей управления краткосрочной ликвидностью является обеспечение текущей платежеспособности Банка и обслуживание платежного оборота клиентов при выполнении условий:

- поддержания оптимальных остатков на корреспондентских счетах nostro, в том числе в ЦБ, необходимых для обеспечения выполнения нормативных требований ЦБ по формированию фонда обязательных резервов;
- обеспечения экономической эффективности краткосрочных операций;
- соблюдения установленных внутренних ограничений на показатели риска краткосрочной ликвидности и сигнальных значений на установленные ЦБ нормативы ликвидности.

Для решения задач управления краткосрочной ликвидностью в Банке осуществляются следующие процедуры:

- на регулярной основе, ежедневно прогнозируется и мониторится значение актуальной платежной позиции;
- определяются параметры краткосрочных операций по привлечению или размещению ресур-

сов на финансовых рынках, необходимых для закрытия краткосрочных разрывов ликвидности (дефицита/профицита ресурсов);

- ежедневно проводятся краткосрочные операции по привлечению или размещению ресурсов на финансовых рынках, необходимые для закрытия разрывов ликвидности.

Платежная позиция рассчитывается с использованием всей доступной Банку информации о предстоящих платежах по собственным операциям Банка и по операциям клиентов, с учетом консервативной оценки вероятности предстоящих платежей по операциям клиентов. Для управления краткосрочной ликвидностью Банк использует в том числе следующие финансовые инструменты:

- межбанковские кредиты,
- депозиты ЦБ,
- РЕПО, в том числе с ЦБ,
- валютный своп.

Операции размещения ресурсов для закрытия краткосрочного избытка ликвидности проводятся только с приоритетными контрагентами, указанными в Политике. Операции привлечения ресурсов для закрытия краткосрочного дефицита ликвидности проводятся, в первую очередь, с приоритетными контрагентами. К их числу относятся контрагенты, признаваемые Банком в качестве наиболее надежных при исполнении ими своих обязательств по краткосрочным операциям, в том числе:

- ЦБ страны,
- банки резиденты и нерезиденты (в случае размещения средств, Банк должен иметь на контрагента лимит принятия кредитного риска),
- крупные корпоративные клиенты Банка (в случае размещения средств Банк должен иметь на контрагента лимит принятия кредитного риска).

Регулирование краткосрочной ликвидностью является приоритетной целью проведения краткосрочных операций с финансовыми инструментами и контрагентами.

С целью повышения стабильности объемов привлечения ресурсов, необходимых для фондирования активных операций, Банк стремится к формированию ресурсной базы, диверсифицированной по финансовым рынкам, клиентам и инвесторам, инструментам и срокам погашения. Стабильная и диверсифицированная структура пассивов позволяет обеспечить взаимозаменяемость источников фондирования в случае, если один или несколько из них сокращаются или становятся недоступными. Для формирования стабильной, диверсифицированной ресурсной базы Банк:

- определяет приоритетные направления развития ресурсной базы и осуществляет стратегическое, годовое и оперативное планирование структуры пассивов с учетом требований по ее диверсификации;
- планирует и осуществляет мероприятия по расширению и диверсификации ресурсной базы, в том числе: расширение и пересмотр набора используемых финансовых инструментов, предлагаемых

банковских продуктов, маркетинговые мероприятия по развитию отношений с клиентами и инвесторами;

- устанавливает внутренние ограничения концентрации ресурсной базы в плане контрагентов, инструментов, валют и сроков погашения.

В качестве основных, стабильных источников фондирования Банк рассматривает:

- срочные депозиты физических лиц,
- остатки на текущих расчетных счетах клиентов (до востребования) по части, которая по оценке Банка является стабильной,
- срочное привлечение ресурсов от корпоративных клиентов, в том числе депозиты, выпущенные векселя, соглашения о неснижаемых остатках на расчетных счетах,
- долгосрочные заимствования на рынках капитала.

При определении целевых показателей в процессе финансового планирования Банк использует консервативный подход к оценке объема и срочности привлекаемых ресурсов:

- остатки на текущих расчетных счетах клиентов (до востребования) планируются в объеме стабильной части, определяемой на основе статистических моделей, протестированных в исторических условиях реальных стрессовых ситуаций и/или резкого оттока клиентских средств;
- привлечение срочных средств корпоративных клиентов и физических лиц планируются в объемах, которые могут устойчиво поддерживаться привлекающими подразделениями.

Краткосрочные межбанковские операции привлечения ресурсов не рассматриваются Банком в качестве устойчивого источника фондирования и используются, в основном, для закрытия краткосрочных дефицитов ликвидности. Краткосрочные операции привлечения ресурсов, обеспеченные ликвидными активами, рассматриваются Банком, в первую очередь, в качестве резервного источника фондирования, используемого в стрессовых ситуациях. Тем не менее, они могут использоваться Банком и в нормальных условиях ведения бизнеса в целях оптимизации доходов/расходов. В нормальных условиях ведения бизнеса, с целью минимизации расходов на фондирование, Банк использует ресурсы по мере повышения их стоимости (от более «дешевых» к более «дорогим»). В стрессовых ситуациях приоритетными характеристиками для выбора источника фондирования являются вероятность реализации операции привлечения ресурсов, срочность и объем финансирования. Принципы управления ресурсной базой реализуются в процессах стратегического, финансового и оперативного планирования.

Для оценки влияния на ликвидность Банка непредвиденных отклонений фактических объемов привлечения и размещения ресурсов от целевых показателей плановых заданий, а также влияния негативных тенденций и кризисных явлений на финансовых рынках Банк периодически проводит стресс-тестирование. Для каждого стрессового сценария делаются предположения относительно степени

влияния отдельных факторов, способных вызвать изменение финансовых потоков, например:

- закрытие отдельных сегментов финансового рынка,
- финансовые сложности крупных заемщиков Банка,
- снижение контрагентами лимитов кредитования Банка,
- резкое изменение уровня цен, процентных ставок, уровня ликвидности и рыночной стоимости отдельных активов Банка,
- снижение доверия к Банку со стороны клиентов.

В рамках сделанных предположений проводятся количественные оценки денежных потоков по отдельным финансовым инструментам, которые учитывают следующие факторы, но не ограничиваются ими:

- изменение вероятности погашения в срок требований Банка,
- изменение возможности использования традиционных для Банка источников ликвидности,
- возможность использования дополнительных (экстренных) источников ликвидности,
- продажа части активов,
- взаимоотношения с акционерами (увеличение уставного капитала, получение займов от акционеров, реструктуризация обязательств перед акционерами),
- сокращение расходов, в том числе на закупку нового оборудования, оплату труда, информационное и консультационное обслуживание;
- возможности по реструктуризации существующих обязательств Банка или клиентов.

Результаты стресс-тестирования могут использоваться в процессе управления ликвидностью для:

- определения целевых параметров структуры баланса в процессе финансового планирования, обеспечивающего устойчивость Банка в стрессовой ситуации;
- определения размера необходимого буфера ликвидности, достаточного для покрытия внепланового дефицита ликвидности в случае развития событий по стрессовому сценарию;
- определения потребности в дополнительных источниках ликвидности;
- разработки плана самооздоровления.

Порядок проведения стресс-тестирования ликвидности и представления его результатов органам управления Банка описывается отдельным внутренним документом, а сами сценарии утверждаются в рамках документа внутренней оценки адекватности капитала Банка.

Целью управления буфером ликвидности является заблаговременное формирование и поддержание резервных источников фондирования в объеме, необходимом для обеспечения устойчивости и платежеспособности Банка на горизонте выживания в стрессовой ситуации и/или в случае непредвиденного возникновения дефицита ликвидности. Буфер ликвидности формируется за счет доступных в стрессовой ситуации, по предположению Банка, источников фондирования.

Основными источниками, формирующими буфер ликвидности, являются ликвидные активы, которые могут быть использованы для выполнения обязательств перед контрагентами:

- непосредственно (остатки наличных денежных средств, остатки на счетах в ЦБ остатки на счетах nostro в банках-контрагентах и расчетных организациях),
- в результате продажи ценных бумаг,
- в результате привлечения обеспеченного финансирования, в том числе от ЦБ.

Для определения объема необходимого буфера ликвидности Банк:

- устанавливает внутреннее ограничение на горизонт выживания,
- проводит стресс-тестирование ликвидности,
- по результатам стресс-тестирования рассчитывает объем необходимого буфера ликвидности, исходя из возможных потребностей в дополнительной ликвидности в течение периода, равного установленному ограничению на горизонт выживания, в случае реализации стрессового сценария.

Банк на регулярной основе проводит анализ активов с точки зрения возможности их использования в качестве обеспечения в стрессовой ситуации.

Для обеспечения основной цели формирования буфера ликвидности Банк:

- регулярно оценивает его необходимый объем,
- организует процесс мониторинга его фактически доступного объема,
- регламентирует условия и порядок использования формирующих источников,
- определяет порядок действий в случае выявления дефицита его доступного объема,
- контролирует использование источников, формирующих буфер ликвидности.

Основной целью управления риском ликвидности (3) является соблюдение аппетита к риску и другим установленным Банком ограничениям риска ликвидности, выполнение установленных ЦБ значений обязательных нормативов в процессе достижения целей, установленных стратегией Банка. При этом обеспечивается возможность своевременного исполнения финансовых обязательств Банка и предоставления финансовых услуг клиентам Банка в запланированные сроки и в необходимом объеме. Для достижения основной цели управления риском ликвидности решаются следующие задачи:

- идентификация и оценка уровня принимаемого риска,
- определение аппетита к риску и его каскадирование в виде формализованных ограничений последнего,
- регулярный мониторинг и контроль его ограничений,
- формирование отчетности об уровне риска ликвидности Банка,
- разработка и совершенствование методологии, внедрение автоматизированных программных решений в области управления им,

• определение порядка принятия решений, влияющих на состояние ликвидности и планирования операций с учётом величины принимаемого риска,

• контроль выполнения планов проведения запланированных операций, в том числе по части резервных источников фондирования,

• регулярное стресс-тестирование подверженности Банка подобному риску, в том числе, для оценки устойчивости к изменению внутренних и внешних факторов,

• определение функций (полномочий и ответственности) подразделений, участвующих в процессе управления данным риском,

• разработка плана самооздоровления, в том числе, организация мониторинга непредвиденной ситуации и актуализация сценариев эскалации,

• разработка и вынесение на рассмотрение органов управления Банка/коллегиальных органов решений, направленных на оптимизацию и снижение риска ликвидности, в том числе предложений по системе его ограничений.

В целях снижения риска невыполнения регулятивных требований Банк определяет сигнальные значения на установленные ЦБ нормативы ликвидности, гарантирующие возможные колебания по отдельным статьям баланса Банка, при условии соблюдения требований ЦБ.

При подготовке плановых заданий в соответствии с Политикой, их целевые показатели устанавливаются таким образом, чтобы при их выполнении на горизонте оперативного планирования обеспечивалось:

- соблюдение сигнальных значений на установленные ЦБ нормативы ликвидности,
- соблюдение внутренних ограничений на показатели риска ликвидности.

Показатели риска ликвидности, на которые Банк устанавливает внутренние ограничения, используются в процессе управления ликвидностью в качестве индикаторов раннего предупреждения, поскольку нарушение внутренних ограничений вызывает активизацию режима повышенного мониторинга за внутрибанковской и общесистемной экономической ситуацией, а также инициирование в Банке вопроса о необходимости ввода в действие плана самооздоровления.

Принципы определения аппетита к риску ликвидности, структура показателей, внутренних ограничений, а также процедуры их установления и контроля подлежат раскрытию в соответствующих внутренних нормативных документах Банка, регламентирующих систему управления риском ликвидности.

План восстановления финансовой устойчивости Банка, или план самооздоровления, разрабатывается и поддерживается в актуальном состоянии с целью заблаговременного определения перечня и порядка реализации мер по восстановлению финансовой устойчивости и поддержанию непрерывности осуществления функций Банка в стрессовой ситуации и ухудшения финансового состояния Банка. План самооздоровления разрабатывается на основе стрессового сценария, учитывающего специфические риски Банка и риски, влияющие на банковский сектор в целом, а также их сочетание.

Сценарий, используемый для определения мероприятий в рамках плана самооздоровления, базируется на прогнозе существенных изменений макроэкономических и финансовых индикаторов, таких как ВВП, курсы валют, рыночные процентные ставки, фондовые индексы, сопоставимые с негативными явлениями в экономике.

Специфические для Банка параметры стресса определяются с учетом его бизнес-стратегии, места в различных сегментах рынка банковских услуг, структуры активов и пассивов, капитальной базы, принимаемых рисков, качества управления и других факторов. Предусмотренные планом самооздоровления меры по восстановлению ликвидности могут включать:

- расширение использования стандартных инструментов привлечения ресурсов, в том числе за счет повышения процентных ставок;
- использование буфера ликвидности (в том числе использование действующих в данный момент возможностей привлечения ликвидности от ЦБ),
- меры по сокращению/сдерживанию объемов кредитования клиентов,
- анализ активов Банка с точки зрения возможности их использования в качестве обеспечения для поддержания ликвидности в стрессовых условиях и привлечение дополнительного обеспеченного финансирования,
- использование дополнительных источников фондирования, в том числе, с учетом возможностей акционеров Банка и аффилированных структур,
- привлечение средств действующих или новых акционеров в уставной капитал и (или) в иные инструменты собственных средств (капитала) Банка,

- прекращение выплат (дивидендов) акционерам, ограничение или приостановка выплат премий, бонусов и компенсаций работникам,
- продажа непрофильных активов,
- продажа (передача) активов вместе с обязательствами,
- переговоры с кредиторами о реструктуризации обязательств, в том числе, о пересмотре сроков погашения обязательств и других условий, о конвертации долга в инструменты капитала, о частичном списании (сокращении) долга.

План самооздоровления не предполагает дополнительного необеспеченного привлечения долгового государственного финансирования, а также финансирования ЦБ и «Фонда по гарантированию вкладов».

План самооздоровления актуализируется при существенных институциональных или финансово-экономических изменениях (в т.ч. изменении структуры, направлений деятельности, стратегии, профиля рисков Банка) и с учетом анализа сложившейся на рынке текущей ситуации, но не реже, чем раз в год.

Функции органов управления, коллегиальных органов и структурных подразделений в процессе управления ликвидностью и риском ликвидности различаются по уровням. Совет директоров Банка:

- определяет приоритетные направления деятельности Банка, его стратегию;

• утверждает и пересматривает стратегию управления рисками и капиталом Банка, в том числе, по части обеспечения достаточности собственных средств (капитала) и ликвидности на покрытие рисков как в целом по Банку, так и по отдельным направлениям его деятельности, а также утверждает порядок управления наиболее значимыми рисками и контролирует реализацию указанного порядка;

- утверждает план самооздоровления;
- решает вопросы и утверждает документы, отнесенные нормативными актами ЦБ в состав/структуре стратегии управления рисками и капиталом Банка (в том числе, утверждает состав и целевые значения показателей аппетита к риску);
- утверждает годовой финансовый план Банка;
- утверждает внутренние нормативные документы Банка по вопросам управления ликвидностью.

Комитет по управлению активами и пассивами:

- устанавливает внутренние ограничения уровня риска ликвидности и сигнальные значения на нормативы ликвидности, установленные ЦБ;
- осуществляет мониторинг соблюдения внутренних ограничений уровня риска ликвидности и сигнальных значений на установленные ЦБ нормативы ликвидности, рассматривает отчетность о мониторинге указанных ограничений;
- регулярно рассматривает текущую динамику нормативов ликвидности, контролирует выполнение обязательных нормативов последней и, в случае необходимости, принимает решения о мерах по улучшению их значений;
- рассматривает конфликт интересов, связанный с управлением риском ликвидности (в т.ч. конфликт между ликвидностью и прибыльностью проводимых операций) и разрешает его в рамках своей компетенции;
- согласует оперативные планы управления активами и пассивами;
- принимает иные решения по управлению ликвидностью, отнесенные к его компетенции согласно положению комитета по управлению активами и пассивами;
- координирует текущую деятельность самостоятельных структурных подразделений Банка по привлечению и размещению ресурсов для обеспечения его финансовой устойчивости и достижения целевых финансовых показателей.

Подразделение управления банковскими рисками:

- осуществляет независимое управление риском ликвидности Банка, включая идентификацию, оценку, мониторинг и контроль за соблюдением установленных ограничений риска ликвидности в рамках своей компетенции;
- осуществляет методологическое обеспечение процесса управления риском ликвидности;

- участвует в работах по внедрению информационных систем управления риском ликвидности и установлению соответствующих потоков данных внутри Банка;
- определяет влияние сделок, связанных с риском ликвидности, на соответствие показателям аппетита к риску и другим установленным Банком ограничениям риска ликвидности;
- проводит стресс-тестирование подверженности Банка риску ликвидности;
- подготавливает и выносит на рассмотрение органов управления Банка и коллегиальных органов отчетность и предложения по управлению риском ликвидности в рамках своей компетенции, в том числе инициирует вопросы установления/пересмотра ограничений риска ликвидности, в т.ч. сигнальных значений на установленные ЦБ нормативы ликвидности;
- организует разработку и поддержку в актуальном состоянии плана самооздоровления;
- идентифицирует возникновения стрессовой ситуации.

Подразделение операций на финансовых рынках:

- проводит операции по привлечению и размещению финансовых ресурсов в соответствии с плановыми заданиями и в целях управления краткосрочной ликвидностью;
- рассчитывает платежную позицию по остаткам на счетах в ЦБ и региональных банках страны;
- обеспечивает необходимый остаток средств на счете в национальной валюте в ЦБ страны для поддержания фонда обязательного резервирования, а также наличных и безналичных средств на счетах в ЦБ в разных валютах для создания возможности осуществления Банком клиентских и прочих операций;
- участвует в разработке проектов оперативных планов управления активами и пассивами;
- участвует в разработке проекта годового финансового плана;
- участвует в разработке и поддержании в актуальном состоянии плана самооздоровления;
- идентифицирует и осуществляет оперативное управление риском ликвидности в рамках своей компетенции;
- инициирует вопросы установления/пересмотра ограничений риска ликвидности;
- осуществляет планирование краткосрочных и среднесрочных операций Банка, а также контроль за соблюдением планов с учетом требований системы управления риском ликвидности, в том числе его ограничений и требований к источникам ликвидности, формирующим буфер последней;
- проводит документирование осуществляемых бизнес-процессов и относящихся к ним контрольных процедур, а также последующую актуализацию внутренних документов с учетом пересмотра рисков, влияющих на деятельность подразделения, и контрольных процедур, направленных на их минимизацию.

Подразделение международных операций:

- рассчитывает платежную позицию по остаткам на счетах nostro в иностранных банках;
- управляет остатками на корреспондентских счетах nostro в иностранных банках (перераспределяет остатки между счетами nostro);
- идентифицирует риск ликвидности в рамках своей компетенции;
- проводит документирование осуществляемых бизнес-процессов и относящихся к ним контрольных процедур, а также последующую актуализацию внутренних документов с учетом пересмотра рисков, влияющих на деятельность подразделения, и контрольных процедур, направленных на их минимизацию.

Подразделение финансового планирования и анализа:

- готовит проекты годовых финансовых планов;
- проводит мониторинг структуры активов и пассивов на предмет сбалансированности целей достижения плановых/стратегических показателей;
- идентифицирует риск ликвидности в рамках своей компетенции;
- участвует в разработке и поддержании в актуальном состоянии плана самооздоровления.

Подразделение отчетности проводит мониторинг и осуществляет прогноз значений установленных ЦБ нормативов ликвидности и концентрации.

Подразделение корреспонденстких счетов:

- осуществляет бухгалтерское оформление финансовых операций для управления ликвидностью;
- проводит мониторинг внутренних ограничений ликвидности в рамках своих полномочий.

Подразделение внутреннего аудита:

- проводит проверки эффективности методологии оценки риска ликвидности и процедур управления им;
- информирует органы управления Банка о выявленных недостатках в функционировании системы управления рисками, по части риска ликвидности, и действиях, предпринятых для их устранения.

Литература

1. Банковские риски: учебник/ коллектив авторов; под. ред. О. И. Лаврушина, Н. И. Валенцевой. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: КНОРУС, 2013. – 296 с.
2. Банковский менеджмент: учебник / коллектив авторов; под ред. д-ра экон. наук, проф. О.И.Лаврушина.- 4-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 560 с.
3. Риск-менеджмент в коммерческом банке: монография / коллектив авторов; под ред. И.В.Ларионовой. – М. : КНОРУС, 2014. – 456 с.
4. Стратегический менеджмент в коммерческом банке: учеб. / А.Р. Алавердов. – М.: Маркет ДС, 2009. – 576 с.

JURISPRUDENCE

UN AND OTHER ORGANIZATIONS ON WAY OF CONTEMPORARY UKRAINIAN ENVIRONMENTAL PROTECTION

Choporova Olha

Inter-Regional Academy of Personnel Management,

Master's Student

[DOI: 10.5281/zenodo.8364897](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364897)

Abstract

Article proposed are devoted to the problem of international response to environmental and economic challenges of Russian aggression against Ukraine. The problem of the activities of UN, IAEA, UNICEF and UNESCO in this context in accordance with their role in solving the global problems of mankind is presented. In general maintained that the UN directly and through its programs (particularly, UNDP) plays a leading environmental role in relation to Ukraine among international organizations during the war. This role is due to both programs of stable development and conservation of the environment, as well as investments in the environmental sector and the promotion of an ecological-friendly economy. The author's summarizing in the studied area are given.

Keywords: environmental protection, UN, IAEA, UNICEF, UNESCO, problems of mankind, wartime Ukraine.

Introduction. Resolution of the mankind's global problems in its totality is inextricably linked to the field of environmental protection, since climate change associated with the anthropogenic factor poses a direct threat to the physical existence of human civilization. In respect to these circumstances, the leading role is given to international organizations dedicated to ensuring and guaranteeing the world law and order within the framework of existing international treaties, conventions and agreements. At the same time, their priority should be paid to the regions in which the theater of operations unfolds, which, today, is the geographical center of Europe represented by Ukraine. Aforesaid is due to the relevance of the study proposed.

Since the research topic represents current events, the scientific community has not yet had time to properly pay attention to it, at least, in papers despite that hundreds of international experts from all over the world are involved in solving the environmental problems of wartime Ukraine [10].

Hence, the problem of the environmental damage and international organizations' impact on its reduce and relief consequences, is gaining prominence among the current problems of public, domestic and international law in contemporary epoch.

The purpose of these papers is to evaluate the level of international environmental legal protection and respond on contemporary threats in the context of war economic activities in Ukraine.

Materials and Methods. Presented papers has done with assistance of formal and compares methods as special and ontology, deduction, analysis ad synthesis as common, which led to obtain a new data and background for discussion and further investigations from contemporary scientific viewpoint. Thereof, research methodology is based on general scientific methods such as analysis, synthesis, induction, deduction, analogy and empirical methods - observation, comparison and so on and so forth.

Methodological basis of the survey, presumably, is a dialectical method, the introduction of which provides an opportunity to study the object and subject of research in their gnoseological unity, as well as the nature of medical law development and their impact, as cause and effect.

Results and Discussion. In September 2015, at the 70th session of the UN General Assembly, the UN Summit on Sustainable Development was held. The summit's summary document, "Transforming Our World: Agenda for Sustainable Development 2030," identified 17 sustainable development goals and a number of supporting goals. Like other UN member states, Ukraine has joined the global process of sustainable development. The Sustainable Development Goals are the global call to action to end poverty, protect the earth's environment and climate, and ensure that people everywhere can enjoy peace and prosperity. These are the goals the UN is working on in Ukraine [2].

Minister of Environmental Protection and Natural Resources of Ukraine Ruslan Strilets met with UN Environment Programme Executive Director Inger Andersen on the sidelines of the Africa Climate Summit. The parties discussed the final stages of the assessment of the consequences of the Kakhovka hydroelectric power plant blow-up and the roadmap for the restoration of southern Ukraine [5].

According to the Ministry of Environmental Protection and Natural Resources, around 30 percent of the country's protected areas, covering more than 1.2 million hectares, have been bombed, polluted, burned, or otherwise affected by military maneuvers. Massive forest fires spread as the fighting rages on, while attacks on fuel and industrial facilities have caused chemicals to leach into rivers and groundwater. UNDP interim Representative Jaco Cilliers said the environmental consequences of the war are widespread and devastating. "The use of explosive ordnance in urban areas, for example, is creating vast quantities of debris and rubble, which can cause air, water, and soil pollution," he said. "Damage to light industry and environmentally

sensitive infrastructure such as water treatment plants and water sanitation utilities is also creating problems that can take years to remediate. This new Centre will both monitor and explore ways to remediate the impacts.” Tobias Thyberg, Ambassador Extraordinary and Plenipotentiary of Sweden to Ukraine, said it is of critical importance to monitor and document the war’s environmental impacts. “These impacts can harm the health and well-being of both humans and wildlife, disrupt ecosystems, and contribute to climate change,” he said. “While large resources and funding now need to go toward Ukraine’s efforts to defend itself against Russia’s aggression, it remains important to also continue funding environmental protection and conservation efforts, to ensure that Ukraine can continue protecting its environment while defending itself against Russia’s illegal war. We hope the Centre will help raise awareness of these factors, inform the recovery process with facts on the ground, and help to conserve Ukraine’s natural heritage for future generations” [4].

UNECE welcomes the approval by the Cabinet of Ministers of Ukraine of the procedure for maintaining a national Register of emissions and pollutants. This Register, which will be operational from 8 October 2023, is expected to facilitate the free provision to the public of information on pollution, such as greenhouse gas emissions, and to facilitate the objective reporting of enterprises on their environmental emissions [7].

Amid the ongoing aggression of the Russian Federation against Ukraine, adoption by the UN General Assembly of resolutions 68/262 «Territorial integrity of Ukraine» (27.03.2014), 71/205, 72/190, 73/263, 74/168 and 75/192 «Situation of human rights in the Autonomous Republic of Crimea and the city of Sevastopol, Ukraine» (19.12.2016, 19.12.2017, 22.12.2018, 18.12.2019), as well as 73/194, 74/17 and 75/29 «Problem of militarization of the Autonomous Republic of Crimea and the city of Sevastopol, Ukraine, as well as parts of the Black Sea and the Sea of Azov» (17.12.2018, 9.12.2019 and 7.12.2020) is instrumental in political and legal terms. In the framework of cooperation with the United Nations system, Ukraine received assistance in the amount of more than \$200 million. The United States is implementing more than 300 projects in the field of human rights protection, social assistance, civil society development, environmental protection and nuclear energy. In 2019, the United Nations portfolio of such assistance included 12 projects with an estimated cost of \$46 million. In response to the devastating humanitarian consequences of Russian aggression against Ukraine and the activities of illegal armed groups in the east of our country, cooperation between Ukraine and the United Nations in the humanitarian field has increased exponentially. Humanitarian assistance is provided by UN bodies responsible for operational activities (UNHCR, OCHA, UNDP, WHO, UNFPA, UNICEF and other relevant bodies) [1].

Just over a year after the IAEA established a permanent presence at Europe’s largest nuclear power plant (NPP) to help prevent an accident there during the conflict in Ukraine, the overall situation at the facility remains highly precarious. At the plant, the IAEA ex-

perts observed the continued presence of mines between the perimeter fences, but they did not see any additional ones during their walkdown activities across the site. However, they have still not been granted access to the rooftops of reactor units 1, 2, 5 and 6. The IAEA team has also been requesting a walkdown of all six turbine halls, one after the other, to be able to fully assess, at one time, whether there may be any items present that may be in contravention of the five principles. At present, this request has not been granted. Three months after the downstream Kakhovka dam was destroyed – causing the depletion of the huge reservoir that the ZNPP had been relying on to cool its reactors and spent fuel – the plant continues work on expanding access to other sources of water, for example through the drilling of groundwater wells. So far, seven such wells of a planned total of 10-12 have been completed. In recent days, the IAEA team observed – on two separate occasions – the operation of these wells supplying the sprinkler ponds, which are located next to the six reactors and used for the plant’s cooling functions. The ZNPP has informed the IAEA team that the seven wells currently operating are accounting for just over half of the approximately 250 cubic meters of water per hour that are required to maintain the cooling water in the sprinkler ponds. This assumes all units remain in a shutdown state. The remaining volume of cooling water is currently pumped from the site’s drainage system. As a result of the new wells, the ZNPP also informed the IAEA that the height of the groundwater had only declined by a very minor level. The IAEA team reported that the ZNPP is performing maintenance on different components and safety systems at the facility, whose six reactors remain shut down, one in hot shutdown and the others in cold shutdown. Maintenance activities of the safety systems of unit 4 are also taking place, including of its transformer, heat exchangers and emergency diesel generators. Once they are completed, the site will conduct the final test of the steam generator that was repaired after a water leak was detected in this unit last month. Nowadays, the IAEA team also conducted other walkdown activities within the site perimeter, including at the main control room, emergency control room and the safety systems rooms of unit 6 and the turbine hall of unit 3 where the team reported that there was no military equipment present at the time of its visit. This morning the IAEA experts visited the turbine hall of reactor unit 1 where they observed a total of fifteen vehicles, but no heavy weapons. The ZNPP continues to receive off-site power from the last remaining 750 kilovolt (kV) power line and a single 330kV backup power line. The IAEA experts were informed by the ZNPP that the site currently does not have any information on the status of repairs of the damaged off-site power lines as they all pass through the military conflict areas. Elsewhere in Ukraine, rotations of the IAEA experts have been conducted this week at the Khmelnitsky, Rivne and South Ukraine NPPs and a rotation of the team at the Chornobyl site is scheduled for next week. The IAEA teams at the four sites did not report any nuclear safety or security issues [8].

UNICEF is working to ensure sustainable management of water resources and solid waste in Ukraine's conflict-affected areas by improving fair access to safe drinking water and safe sanitation, reducing exposure to environmental risks, improving hygiene in communities, schools and health facilities and engaging young people for environmental-friendly activities [9].

Additionally, as the war in Ukraine continues, humanitarian conditions for children in Ukraine keep deteriorating. Around two-thirds of children are now displaced either within Ukraine or in neighboring countries. Children continue to be killed, injured and deeply traumatized by the devastating violence around them. They are terrified, in shock, and desperate for safety, stability, protection and psychosocial care. Attacks using explosive weapons in populated urban areas continue to inflict civilian casualties and considerable damage to essential infrastructure and services. Children are being forced to protect themselves in underground shelters and subway stations, where conditions are dire [6].

UNESCO's response focuses on all key areas of heritage: advising professionals on how to protect buildings and safeguard living heritage, delivering protective equipment, digitizing works of art and archives, advising the national authorities in updating policies and strategies, delivering protective equipment and materials, digitizing works of art and archives, supporting inventory-making, supporting artists and cultural professionals, integrating living heritage in education, and coordinating the fight against the illicit trafficking of cultural property, and assessing damage. The priority: preventing destruction and looting. From the start of the war, UNESCO experts provided advice to Ukrainian cultural professionals on how to secure buildings, improve fire-fighting systems and identify safe shelters for works of art that could be moved. The Organization has also delivered protective material for the facades of cultural buildings and for outdoor works of art such as statues, as well as electric generators. UNESCO supports the authorities in marking cultural sites with the Blue Shield emblem of the 1954 Convention, which indicates that these properties are under the protection of international law and that targeting them can lead to prosecution. The Organization also provided urgent repair works for cultural sites, for example in Kharkiv, Kyiv and Odesa. From the beginning of the war, UNESCO undertook a preliminary assessment of the damage inflicted on Ukrainian cultural property. This analysis is conducted by collecting, cross-checking and studying information on damage from several reliable sources. To further improve this method, UNESCO decided in May 2022 to systematically use satellite images, with the expertise of UNITAR/UNOSAT. These images allow verifying the exact state of cultural sites, especially when they are currently inaccessible by land, notably when they are located on the front line. UNESCO created a dedicated online platform to list and georeference all these assessments. These efforts are being supplemented by in situ damage assessments [3].

Conclusions. 1. The UN directly and through its programs (particularly, UNDP) plays a leading envi-

ronmental role in relation to Ukraine among international organizations during the war. This role is due to both programs of stable development and conservation of the environment, as well as investments in the environmental sector and the promotion of an ecological-friendly economy.

2. The role of the IAEA comes down to monitoring the physical and technical stability of nuclear power plants, ensuring their nuclear safety, which avoids the largest man-made catastrophe in human history and ensures its survival on the Earth. At the same time, the IAEA is concerned about the proper functioning of water supply facilities that can serve as cooling agents for nuclear power plants.

3. UNICEF is working to ensure sustainable management of water resources and solid waste in Ukraine's conflict-affected areas by improving fair access to safe drinking water and safe sanitation, reducing exposure to environmental risks, improving hygiene in communities, schools and health facilities and engaging young people for environmental-friendly activities.

4. UNESCO's response focuses on all key areas of heritage: advising professionals on how to protect buildings and safeguard living heritage, delivering protective equipment, digitizing works of art and archives, advising the national authorities in updating policies and strategies, delivering protective equipment and materials, digitizing works of art and archives, supporting inventory-making, supporting artists and cultural professionals, integrating living heritage in education, and coordinating the fight against the illicit trafficking of cultural property, and assessing damage. The priority: preventing destruction and looting.

5. Aforesaid and other tasks are resolved by international organizations not only through monitoring and observation, but also through the adoption of acts of international law, in particular, resolutions and memoranda, appeals to heads of state and governments of other countries and their associations, which makes it allowable to draw the attention of the advanced international community to the problems of the ecological and economic survival of Ukraine in the context of aggressive military operations.

At the same time, the problem of subsequent nuclear disarmament, the liberation of protected facilities and reserves in order to preserve biodiversity on our planet remains unresolved, which requires further scientific research and investigations.

References

1. Activities in the UN. Permanent Mission of Ukraine to the United Nations. URL: <https://ukraineun.org/en/ukraine-and-un/activities-in-un/> (Retrieved on September, 9, 2023).
2. How the UN is supporting The Sustainable Development Goals in Ukraine. United Nations. Ukraine. URL: <https://ukraine.un.org/en/sdgs> (Retrieved on September, 9, 2023).
3. In the Face of War, UNESCO's action in Ukraine. UNESDOC. Цифрова бібліотека. URL: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000384454> (Retrieved on September, 9, 2023).

4. New coordination center to assess environmental impacts of the war on Ukraine. UNDP. Україна. URL: <https://www.undp.org/ukraine/press-releases/new-coordination-center-assess-environmental-impacts-war-ukraine> (Retrieved on September, 9, 2023).
5. Ruslan Strilets met with UN Environment Programme Executive Director Inger Andersen to discuss consequences of Kakhovka HPP blow-up. Government portal. URL: <https://www.kmu.gov.ua/en/news/tryv-aie-robota-nad-naslidkamy-pidryvu-kakhovskoi-hes-ruslan-strilets-zustrivsia-iz-vykonavchoiu-dyrektorkoiu-un-environment-programme-inher-andersen> (Retrieved on September, 9, 2023).
6. Ukraine emergency response in neighbouring countries. UNICEF for every child. Europe and Central Asia. URL: https://www.unicef.org/eca/ukraine-emergency-response-neighbouring-countries?gclid=EAIAI-Qob-ChMIgePvjuWdgQMVFASiAx2M6wkSEAAVASAAEgK1wvD_BwE (Retrieved on September, 9, 2023).
7. Ukraine introduces mandatory reporting by enterprises on greenhouse gas emissions and other pollutants using UNECE legal tools. UNECE. Sustainable Development Goals. URL: <https://unece.org/climate-change/press/ukraine-introduces-mandatory-reporting-enterprises-greenhouse-gas-emissions> (Retrieved on September, 9, 2023).
8. Update 182 - IAEA Director General Statement on Situation in Ukraine. IAEA Website Official. URL: <https://www.iaea.org/newscenter/pressreleases/update-182-iaea-director-general-statement-on-situation-in-ukraine> (Retrieved on September, 9, 2023).
9. Youngsters team up to transform the environment in Ukraine. UNICEF Ukraine. URL: <https://www.unicef.org/ukraine/en/stories/youngsters-team-transform-environment-ukraine#:~:text=UNICEF%20is%20working%20to%20ensure,health%20facilities%2C%20and%20engaging%20young> (Retrieved on September, 9, 2023).
10. Понад 200 експертів долучилися до ПРООН, Європейського Союзу та національних партнерів з метою обговорення екологічних наслідків війни в Україні. UNDP. Україна. URL: <https://www.undp.org/uk/ukraine/press-releases> (Retrieved on September, 9, 2023).

MATHEMATICAL SCIENCES

PROPERTIES OF THE BISUBDIFFERENTIAL OF BICONVEX FUNCTIONS

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Baku State University

[DOI: 10.5281/zenodo.8364901](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364901)

СВОЙСТВА БИСУБДИФФЕРЕНЦИАЛА БИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы

доктор физико-математических наук

Бакинский Государственный Университет

Abstract

In this work, a number of properties of bisubdifferential and biconjugate functions for biconvex functions are studied. Necessary and sufficient conditions for the equality of the bisubdifferential of the sum and the sum of the bisubdifferentials of two biconvex functions are obtained. A biconvex mathematical programming problem is considered.

Аннотация

В работе изучен ряд свойств бисубдифференциала и бисопряженных функций для бивыпуклых функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бивыпуклых функций. Рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования.

Keywords: bisublinear function, tensor product, biconjugate function.

Ключевые слова: бисублинейная функция, тензорное произведение, бисопряженная функция.

1. Введение

В исследовании оптимальности высокого порядка для негладких задач минимизации возникает новое направление n -выпуклый анализ. В n -выпуклом анализе в основном изучаются n -выпуклое множество и n -выпуклая функция. Известно, что в выпуклом анализе существенную роль играет теорема отделимости. В n -выпуклым анализе основную роль играет теория тензорного произведения.

В работе исследован ряд свойств сублинейных функций, определенных на тензорном произведении пространств. Изучена бисубдифференцируемость бивыпуклых функций и изучены ряд их свойств. Получены необходимые и достаточные условия бисубдифференциала суммы бивыпуклых функций. Рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования. В исследовании бивыпуклых функций существенную роль играет бивыпуклое множество. Такие вопросы изучены также в работах [1]-[8].

Отметим, что n -выпуклое множество и n -выпуклая функция изучались в [6].

Пусть X -банахово пространство. Функцию $f : X \rightarrow R$ назовем 2-липшицевой с постоянной L в окрестности точки x_0 , если f для некоторого $\epsilon > 0$ удовлетворяет условию $|f(z + x + y) - f(z + x) - f(z + y) + f(z)| \leq L\|x\|\|y\|$ при $x, y \in \epsilon B$, $z \in x_0 + \epsilon B$.

Если f 2-липшицевая с постоянной L в окрестности точки x_0 функция, то положим

$$f^{[2]}(x_0; x, y) = \lim_{\substack{z \rightarrow x_0, \\ t \downarrow 0, \tau \downarrow 0}} \frac{1}{t\tau} (f(z + tx + \tau y) - f(z + tx) - f(z + \tau y) + f(z))$$

при $x, y \in X$. Легко проверяется, что $(x, y) \rightarrow f^{[2]}(x_0; x, y)$ бисублинейная функция. Именно это и приводит к изучению бивыпуклых функций.

Множество всех непрерывных билинейных симметричных функций из $X \times X$ в R , обозначим через $\overline{B}(X^2, R)$. Множество

$\partial_2 f(x_0) = \{b \in \overline{B}(X^2, R) : f^{[2]}(x_0; x, y) \geq b(x, y)\}$ назовем обобщенным 2-субдифференциалом функции при $x, y \in X$

f в точке x_0 .

Отметим, что эти определения даны автором в 1980 году и обсуждены Ф.П. Демьяновым и А.М.Рубиновым и опубликованы только в 1988 году в более общем виде, где определен субдифференциал произвольного порядка. Считаю, что они не хорошо оценили теорию Ф.Кларка. Из этих определений следуют

класс n – выпуклых функций, класс n -суб-линейных функций, класс n – липшицевых функций, класс n – выпуклых и n – нормальных множеств, которые подробно изучены автором.

Работа состоит из введения и трех пунктов. В п. 2 с помощью тензорного произведения изучается ряд свойств четных бисублинейных функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бисублинейных функций. В п. 3 изучен ряд свойств бисопряженных функций для бивыпуклых функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бивыпуклых функций. В п. 4 рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования.

2. Свойства четных бисублинейных функций

Пусть X и Y действительные линейные пространства. Обозначим (см. [9], [10]) через $X\Theta Y$ пространство формальных линейных комбинаций (с действительными коэффициентами) элементов $X \times Y$. Употребляя запись $x\Theta y$ вместо $1(x,y)$ для элементов естественного базиса в $X\Theta Y$, рассмотрим множество $L \subset X\Theta Y$ элементов любого из следующих видов:

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2)\Theta y - x_1\Theta y - x_2\Theta y; \\ & x\Theta(y_1 + y_2) - x\Theta y_1 - x\Theta y_2, \\ & \lambda x\Theta \mu y - \lambda \mu x\Theta y; \end{aligned}$$

взятых по всем $x_1, x_2, x \in X$, $y_1, y_2, y \in Y$, $\lambda, \mu \in R$. Введем обозначения $X \otimes Y$ для факторпространства $X\Theta Y / \text{Lin } L$. Если $x \in X$, $y \in Y$, то класс эквивалентности, содержащий $x\Theta y$, обозначим $x \otimes y$, т.е. обозначим через $x \otimes y$ класса смежности $x\Theta y + \text{Lin } L$.

Пусть X и Y действительные банаховы пространства и $q : X \times Y \rightarrow R$. Если функции $x \rightarrow q(x, y)$, $y \rightarrow q(x, y)$ выпуклы и положительно однородны, то функцию q назовем бисублинейной. Множество всех непрерывных билинейных отображений из $X \times Y$ в R обозначим через $B(X \times Y, R)$. Обозначим через $X \otimes Y$ тензорные произведения пространств X и Y . Считаем, что $X \otimes Y$ снабжено проективной топологией (см. [9]). Множество четных (т.е. $q(x, y) = q(-x, -y)$) бисублинейных непрерывных функций из $X \otimes Y$ в R обозначим через H . Множество сублинейных непрерывных функций из $X \otimes Y$ в R обозначим через H_1 .

$$\begin{aligned} \text{Положим } \bar{q}(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) : v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, n \in N \right\}, \\ \bar{q}(x \otimes y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) : x \otimes y = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, n \in N \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1. Если $q : X \times Y \rightarrow R$ четная бисублинейная функция, то $\bar{q}(x \otimes y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$ и $\bar{q} : X \otimes Y \rightarrow R$ сублинейная функция.

Доказательство. Так как $X \otimes Y = X\Theta X / \text{Lin } M$, то $x \otimes y = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x^i \Theta y^i \in x\Theta y + \text{Lin}\{(x_1 + x_2)\Theta y - x_1\Theta y - x_2\Theta y, x\Theta(y_1 + y_2) - x\Theta y_1 - x\Theta y_2, \lambda x\Theta \mu y - \lambda \mu x\Theta y, \\ & : x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y; \lambda, \mu \in R\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{q}(x \otimes y) &= \inf \left\{ q(x, y) + \sum_{i=1}^n q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^m q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_2^j)) + \sum_{s=1}^k q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^k q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) \right. \\ & \quad \left. : x, x_1^i, x_2^i, z^j, u^s \in X; y, y^i, y_1^j, y_2^j, v^s \in Y; \lambda^s, \mu^s \in R; n, m, k \in N \cup \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Так как q бисублинейная функция, то

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_2^i, y^i) \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^m q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_2^j)) \geq 0. \end{aligned}$$

Так как q бисублинейная четная функция, то $\sum_{s=1}^k q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^k q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) \geq 0$. Тогда получим, что $\bar{q}(x \otimes y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$.

Ясно, что

$$\begin{aligned}\bar{q}(v_1 + v_2) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^n q(u^i, v^i) : v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^n u^i \otimes v^i, (u^i, v^i) \in X \times Y, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \\ &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(x^i, y^i) : v_1 = \sum_{i=1}^k x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, k \in \mathbb{N}\right\} + \\ &+ \inf\left\{\sum_{i=1}^m q(x_2^i, y_2^i) : v_2 = \sum_{i=1}^m x_2^i \otimes y_2^i, (x_2^i, y_2^i) \in X \times Y, m \in \mathbb{N}\right\} = \bar{q}(v_1) + \bar{q}(v_2)\end{aligned}$$

при $v_1, v_2 \in X \otimes Y$. Так как q бисублинейная четная функция, то

$$\begin{aligned}\bar{q}(\lambda v) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(\lambda x^i, y^i) : \lambda v = \sum_{i=1}^k \lambda x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, k \in \mathbb{N}\right\} = \\ &= \lambda \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(x^i, y^i) : v = \sum_{i=1}^k x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, k \in \mathbb{N}\right\} = \lambda \bar{q}(v)\end{aligned}$$

при $\lambda \geq 0$. Поэтому $\bar{q} : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейная функция. Лемма доказана.

Из леммы 2.1 следует, что если $q \in H$, то $\bar{q} \in H_1$.

Лемма 2.2. Если q непрерывная в нуле бисублинейная функция, то существует $c > 0$ такое, что $|q(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|$ при $(x, y) \in X \times Y$.

Доказательство. Из непрерывности функций q в нуле вытекает, что для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|q(x, y)| \leq \varepsilon$ при $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \leq \delta$. Тогда

$$\left|q\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}, \frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right| = \frac{\delta^2}{4\|x\|\|y\|} |q(x, y)| \leq \varepsilon$$

при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда имеем, что $|q(x, y)| \leq \frac{4\varepsilon}{\delta^2} \|x\| \|y\|$ при $(x, y) \in X \times Y$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Если X и Y банаховы пространства, $q : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ четная бисублинейная непрерывная функция, то $\bar{q} : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция.

Доказательство. Легко проверяется, что множество $\bar{B} = \text{co}(B_1 \otimes B_2)$, является единичным шаром в $X \otimes Y$, где $B_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ и $B_2 = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$. По условию q бисублинейная непрерывная функция, поэтому по лемме 2.2 существует $M > 0$ такое, что $|q(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$ при $(x, y) \in X \times Y$. Тогда имеем, что $q(x, y) \leq M$ для любого $(x, y) \in B_1 \times B_2$. Если $v \in \text{co}(B_1 \otimes B_2)$, то существуют $x_i \in B_1$ $y_i \in B_2$ и $\lambda_i \geq 0$,

, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ при $i = 1, \dots, k$ такие, что $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i \otimes y_i)$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда из равенства

$$\bar{q}(x_i \otimes y_i) = q(x_i, y_i) \leq M \text{ и из сублинейности функции } \bar{q} \text{ имеем, что } \bar{q}(v) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{q}(x_i \otimes y_i) \leq M, \text{ т.е.}$$

$\bar{q}(v) \leq M$ при $v \in \text{co}(B_1 \otimes B_2)$. Так как $\bar{q}(0) = 0$, то по теореме 3.2.1[11, с.181] получим, что \bar{q} непрерывная функция в нуле. Поэтому \bar{q} непрерывная функция в пространстве $X \otimes Y$. Лемма доказана.

Пусть X и Y банаховы пространства, $B(X \times Y, \mathbb{R})$ пространство всех непрерывных билинейных функций из $X \times Y$ в \mathbb{R} . Отметим, что если $X \otimes Y$ наделено проективной топологией, то $(X \otimes Y)^* = B(X \times Y, \mathbb{R})$.

Положим $\partial_2 q = \{b \in B(X \times Y, \mathbb{R}) : q(x, y) \geq b(x, y) \text{ при } (x, y) \in X \times Y\}$,

$$\partial \bar{q} = \{z^* \in (X \otimes Y)^* : \bar{q}(v) \geq z^*(v) \text{ при } v \in X \otimes Y\}.$$

Лемма 2.4. Если X и Y банаховы пространства, $q : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ бисублинейная непрерывная четная функция, то $b \in B(X \times Y, \mathbb{R})$ принадлежит $\partial_2 q$ в том и только в том случае, когда $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$ принадлежит $z^* \in \partial \bar{q}$.

Доказательство. Если $b \in \partial_2 q$, то положив $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$, где $n \in \mathbb{N}$,

получим, что $\sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) \geq \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$. Отсюда имеем, что $\bar{q}(v) \geq z^*(v)$ при $v \in X \otimes Y$. Поэтому $z^* \in \partial \bar{q}$. Обратно, если $z^* \in \partial \bar{q}$, то из представления $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$, где $n \in \mathbb{N}$, следует, что $z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$ и $q(x, y) = \bar{q}(x \otimes y) \geq z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда следует, что $b \in \partial_2 q$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если X и Y банаховы пространства, $q : X \times Y \rightarrow R$ четная бисублинейная непрерывная функция, то $\bar{q}(v) = \max\{z^*(v) : z^* \in \partial\bar{q}\}$ и $q(x, y) = \max\{b(x, y) : b \in \partial_2 q\}$.

Доказательство. Если $q : X \times Y \rightarrow R$ бисублинейная непрерывная четная функция, то из леммы 2.1 следует, что $\bar{q} : X \otimes Y \rightarrow R$ непрерывная сублинейная функция. Тогда из предложения 4.1.1[11, с.203] имеем, что $\bar{q}(v) = \max\{z^*(v) : z^* \in \partial\bar{q}\}$. Так как $z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ и $q(x, y) = \bar{q}(x \otimes y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, то отсюда следует, что $q(x, y) = \max\{b(x, y) : b \in \partial_2 q\}$. Следствие доказано.

Отметим, что если $q : X \times Y \rightarrow R$ четная бисублинейная непрерывная функция, то

$$\begin{aligned}\bar{q}(v) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^n \sup\{b(x^i, y^i) : b \in \partial_2 q\} : v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, n \in N\right\} = \\ &= \sup\{z^*(v) : z^* \in \partial\bar{q}\} = \sup\{b(v) : b \in \partial_2 q\}\end{aligned}$$

где $b(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$.

Лемма 2.5. Пусть X и Y векторные пространства, $\bar{y} \in Y$, $Y_0 = \{\lambda\bar{y} : \lambda \in R\}$, $P : X \times Y_0 \rightarrow R$ бисублинейная функция, $P(-x, -y) = P(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y_0$. Тогда если $v \in X \otimes Y_0$, то существует точка $x \in X$ такая, что $v = x \otimes \bar{y}$ и

$$\bar{P}(v) = \inf\left\{\sum_i P(x^i, y^i) : v = \sum_i x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y\right\} = P(x, \bar{y}).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned}\bar{P}(v) &= \inf\left\{\sum_i P(x^i, \lambda_i \bar{y}) : v = \sum_i x^i \otimes \lambda_i \bar{y}, x^i \in X, \lambda_i \in R\right\} = \\ &= \inf\left\{\sum_{\lambda_i > 0} P(x^i, \lambda_i \bar{y}) + \sum_{\lambda_i < 0} P(x^i, \lambda_i \bar{y}) : v = \sum_i x^i \otimes \lambda_i \bar{y}, x^i \in X, \lambda_i \in R\right\} = \\ &= \inf\left\{\sum_{\lambda_i > 0} P(\lambda_i x^i, \bar{y}) + \sum_{\lambda_i < 0} P(-\lambda_i x^i, -\bar{y}) : v = \sum_i \lambda_i x^i \otimes \bar{y}, x^i \in X, \lambda_i \in R\right\} \geq \\ &\geq \inf\left\{P\left(\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i x^i, \bar{y}\right) + P\left(-\sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i x^i, -\bar{y}\right) : v = \sum_i \lambda_i x^i \otimes \bar{y}, x^i \in X, \lambda_i \in R\right\} = \\ &= \inf\left\{P\left(\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i x^i, \bar{y}\right) + P\left(\sum_{\lambda_i < 0} (\lambda_i x^i, \bar{y}) : v = \left(\sum_i \lambda_i x^i\right) \otimes \bar{y}, x^i \in X, \lambda_i \in R\right)\right\}.\end{aligned}$$

Обозначив $x_1 = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i x^i$, $x_2 = \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i x^i$ и $x = x_1 + x_2$ получим, что $v = x \otimes \bar{y}$ и

$$\begin{aligned}\bar{P}(v) &\geq \inf\{P(x_1, \bar{y}) + P(x_2, \bar{y}) : v = (x_1 + x_2) \otimes \bar{y}, x_i \in X, i = 1, 2\} \geq \\ &\geq \inf\{P(x, \bar{y}) : v = x \otimes \bar{y}, x \in X\} = P(x, \bar{y}).\end{aligned}$$

Из определения $\bar{P}(v)$ вытекает, что $\bar{P}(v) \leq P(x, \bar{y})$. Поэтому $\bar{P}(v) = P(x, \bar{y})$. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Пусть X и Y векторные пространства, $\bar{y} \in Y$, $Y_0 = \{\lambda\bar{y} : \lambda \in R\}$, $P_1 : X \times Y_0 \rightarrow R$ и $P_2 : X \times Y_0 \rightarrow R$ бисублинейные функции, $P_1(-x, -y) = P_1(x, y)$, $P_2(-x, -y) = P_2(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y_0$ и $P = P_1 + P_2$. Тогда если $v \in X \otimes Y_0$, то существует точка $x \in X$ такая, что $v = x \otimes \bar{y}$ и $\bar{P}(v) = P(x, \bar{y}) = P_1(x, \bar{y}) + P_2(x, \bar{y}) = \bar{P}_1(v) + \bar{P}_2(v)$.

Если X и Y банаховы пространства, q_1, q_2 бисублинейные функции из $X \times Y$ в R , то из определения $\partial_2 q_1$ и $\partial_2 q_2$ следуют, что $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 \subset \partial_2(q_1 + q_2)$.

Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то из следствия 2.1 следует, что

$$q_1(x, y) = \max\{b_1(x, y) : b_1 \in \partial_2 q_1\} \text{ и } q_2(x, y) = \max\{b_2(x, y) : b_2 \in \partial_2 q_2\}$$

при $(x, y) \in X \times Y$. Положим

$$p_1(v) = \max\{b_1(v) : b_1 \in \partial_2 q_1\}, p_2(v) = \max\{b_2(v) : b_2 \in \partial_2 q_2\} \text{ и } p_3(v) = \max\{b(v) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\}$$

при $v \in X \otimes Y$, где $b(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$.

Теорема 2.1. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 = \partial_2(q_1 + q_2)$ в том и только в том случае, когда $p_1(v) + p_2(v) = p_3(v)$ при $v \in X \otimes Y$.

Доказательство. Если $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 = \partial_2(q_1 + q_2)$, то

$$\begin{aligned}
 p_1(v) + p_2(v) &= \max\{b_1(v) : b_1 \in \partial_2 q_1\} + \max\{b_2(v) : b_2 \in \partial_2 q_2\} = \\
 &= \max\{b_1(v) + b_2(v) : b_1 \in \partial_2 q_1, b_2 \in \partial_2 q_2\} = \\
 &= \max\{b(v) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} = \max\{b(v) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\} = p_3(v),
 \end{aligned}$$

т.е. $p_1(v) + p_2(v) = p_3(v)$ при $v \in X \otimes Y$.

Обратно, если $p_1(v) + p_2(v) = p_3(v)$ при $v \in X \otimes Y$, то

$$\begin{aligned}
 p_1(v) + p_2(v) &= \max\{b_1(v) : b_1 \in \partial_2 q_1\} + \max\{b_2(v) : b_2 \in \partial_2 q_2\} = \\
 &= \max\{b(v) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} = \max\{b(v) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\} = p_3(v)
 \end{aligned}$$

при $v \in X \otimes Y$. Ясно, что $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2(q_1 + q_2)$ выпуклое множество. Покажем, что $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2(q_1 + q_2)$ замкнутые множества относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$.

Пусть $b_k \in \partial_2 q_1$ и $b_k \rightarrow b$ в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x, y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Тогда из неравенства $q_1(x, y) \geq b_k(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$ следует, что $q_1(x, y) \geq b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому $\partial_2 q_1$ замкнутое множество относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$. Так как топология $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$ сильнее, чем топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$, то имеем, что $\partial_2 q_1$ замкнутое множество относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$. Аналогично имеем, что $\partial_2 q_2, \partial_2(q_1 + q_2)$ замкнутые множества относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$. Тогда получим, что $\partial p_1 = \partial_2 q_1, \partial p_2 = \partial_2 q_2, \partial p_3 = \partial_2(q_1 + q_2)$. Так как $p_1(v), p_2(v)$ и $p_3(v)$ выпуклые функции, $p_1(v) \leq \bar{q}_1(v), p_2(v) \leq \bar{q}_2(v)$ и $p_3(v) \leq \bar{q}_3(v)$ при $v \in X \otimes Y$ и $\bar{q}_1(v), \bar{q}_2(v)$ и $\bar{q}_3(v)$ непрерывные функции в $X \otimes Y$ (см.лемму 2.3), то имеем, что $p_1(v), p_2(v)$ и $p_3(v)$ непрерывные функции в пространстве $X \otimes Y$. Поэтому $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ и $\partial_2(q_1 + q_2)$ компактные множества относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$. Тогда по теореме отдельности из равенства $\max\{b(v) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} = \max\{b(v) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\}$ при $v \in X \otimes Y$ следует, что $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 = \partial_2(q_1 + q_2)$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Если $p: X \otimes Y \rightarrow R_{+\infty}$ сублинейная функция, то $q(x, y) = p(x \otimes y)$ бисублинейная четная функция из $X \times Y$ в $R_{+\infty}$.

Доказательство. Если $(x_1, y), (x_2, y) \in X \times Y, \alpha \in [0,1]$, то

$$\begin{aligned}
 q(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y) &= p((\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \otimes y) = p((\alpha x_1 \otimes y + (1-\alpha)x_2 \otimes y) \leq \\
 &\leq \alpha p(x_1 \otimes y) + (1-\alpha)p(x_2 \otimes y) = \alpha q(x_1, y) + (1-\alpha)q(x_2, y).
 \end{aligned}$$

Если $(x, y_1), (x, y_2) \in X \times Y, \alpha \in [0,1]$, то аналогично имеем, что

$$q(x, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha q(x, y_1) + (1-\alpha)q(x, y_2).$$

Если $\lambda \geq 0$, то

$$\begin{aligned}
 q(\lambda x, y) &= p(\lambda x \otimes y) = \lambda p(x \otimes y) = \lambda q(x, y), \\
 q(x, \lambda y) &= p(x \otimes \lambda y) = \lambda p(x \otimes y) = \lambda q(x, y).
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$q(-x, -y) = p(-x \otimes -y) = p(x \otimes y) = q(x, y)$$

при $(x, y) \in X \times Y$. Лемма доказана.

Если $p: X \otimes Y \rightarrow R_{+\infty}$ сублинейная функция и $q(x, y) = p(x \otimes y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, то

$$\begin{aligned}
 \bar{q}(v) &= \inf\{\sum_{i=1}^n p(x^i \otimes y^i) : v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, n \in N\} \geq \\
 &\geq \inf\{p(\sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i) : v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i, (x^i, y^i) \in X \times Y, n \in N\} = p(v)
 \end{aligned}$$

при $v \in X \otimes Y$, т.е. $\bar{q}(v) \geq p(v)$ при $v \in X \otimes Y$.

Лемма 2.7. Если $b_k \in B(X \times Y, R)$, то последовательность b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x, y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, в том и только в том случае, когда b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$.

Доказательство. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x, y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x^i, y^i) = b(x^i, y^i)$

при $(x^i, y^i) \in X \times Y, i = 1, \dots, n$. Поэтому $\sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x^i, y^i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_k(x^i, y^i) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$. Отсюда следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(v) = b(v)$, т.е. b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$.

Обратно, если b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(v) = b(v)$ при $v \in X \otimes Y$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x \otimes y) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(x, y) = b(x \otimes y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$. Лемма доказана.

Следствие 2.3. Множество $A \subset B(X \times Y, R)$ замкнуто относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \times Y)$ в том и только в том случае, когда A замкнуто относительно топологии $\sigma(B(X \times Y, R), X \otimes Y)$.

Множество $A \subset B(X \times Y, R)$ называется B -выпуклым, если для любого $\bar{x}^* \notin A$ существуют $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ и $\alpha \in R$ такие, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in A$.

Лемма 2.8. Если $q : X \times Y \rightarrow R$ непрерывная бисублинейная четная функция, то множество $\partial_2 q$ B -выпукло.

Доказательство. Если $\bar{x}^* \notin \partial_2 q$, то существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $q(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть число α такое, что $q(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда $q(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{x^*(\bar{x}, \bar{y}) : x^* \in \partial_2 q\} < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. Если $q : X \times Y \rightarrow R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $\bar{x}^* \notin \partial_2 q$ и $b_1, \dots, b_k \in B(X \times Y, R)$, то существуют число $\bar{\alpha}$, $\bar{b} \in \{b_1, \dots, b_k\}$ и точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такие, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q$ и $b \in \text{co}\{b_1, \dots, b_k\}$.

Доказательство. Если $\bar{x}^* \notin \partial_2 q$, то существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $q(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть число α такое, что $q(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда $q(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{x^*(\bar{x}, \bar{y}) : x^* \in \partial_2 q\} < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q$. Пусть билинейная функция $\bar{b} \in \{b_1, \dots, b_k\}$ такая, что $\bar{b}(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{b_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, b_k(\bar{x}, \bar{y})\}$. Тогда получим, что $\bar{b}(\bar{x}, \bar{y}) \geq b(\bar{x}, \bar{y})$ при $b \in \text{co}\{b_1, \dots, b_k\}$. Поэтому $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q$ и $b \in \text{co}\{b_1, \dots, b_k\}$, где $\bar{\alpha} = \alpha + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма доказана.

Из леммы 2.9 следует, что если $q : X \times Y \rightarrow R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $z^* \notin \partial_2 q + b$, где $b \in B(X \times Y, R)$, то существуют число $\bar{\alpha}$ и точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < z^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q + b$. Поэтому если $b_1 \in B(X \times Y, R)$ такая билинейная функция, что $b \neq b_1$ и $b(\bar{x}, \bar{y}) = b_1(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < z^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q + \text{co}\{b, b_1\}$.

Следствие 2.4. Если $q : X \times Y \rightarrow R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $\bar{x}^* \notin \partial_2 q + \text{co}\{0, b_1, \dots, b_k\}$ и $b_1, \dots, b_k \in B(X \times Y, R)$, то существуют число $\bar{\alpha}, \bar{b} \in \{0, b_1, \dots, b_k\}$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такие, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q$ и $b \in \text{co}\{0, b_1, \dots, b_k\}$.

Так как $\bar{x}^* \notin \partial_2 q + \text{co}\{0, b_1, \dots, b_k\}$, то отсюда следует, что $\bar{x}^* \notin \partial_2 q$. Поэтому справедливость следствия 2.3 следует из леммы 2.9.

Пример 2.1. Покажем, что если $b \in B(X \times Y, R)$, то $\text{co}\{b, 2b\}$ B -выпуклое множество. Ясно, что

$$\max_{z^* \in \text{co}\{b, 2b\}} z^*(x, y) = \begin{cases} 2b(x, y) : b(x, y) \geq 0, \\ b(x, y) : b(x, y) < 0. \end{cases}$$

Пусть $\bar{x}^* \notin \text{co}\{b, 2b\}$. Тогда существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $\max_{z^* \in \text{co}\{b, 2b\}} z^*(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$, т.е. $\begin{cases} 2b(\bar{x}, \bar{y}) : b(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \\ b(\bar{x}, \bar{y}) : b(\bar{x}, \bar{y}) < 0 \end{cases} < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Если $b(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, то отсюда следует, что $2b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому $b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Если $b(\bar{x}, \bar{y}) < 0$, то отсюда следует, что $b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому $2b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда получим, что $\text{co}\{b, 2b\}$ B -выпуклое множество.

Пример 2.2. Если $b \in B(X \times Y, R)$, то положим $\|b\| = \sup_{x \in B_1, y \in B_2} |b(x, y)| = \sup_{x \in B_1, y \in B_2} |b(x, y)|$, где $B_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, $B_2 = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$. Покажем, что $B = \{b \in B(X \times Y, R) : \|b\| \leq 1\}$ B -выпуклое множество. Пусть $\bar{x}^* \notin B$. Тогда существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_1 \times B_2$ такая, что $\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) > 1$. Если число $\alpha > 0$ такое, что $\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) > \alpha > 1$, то получим, что $\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) > \alpha > 1 \geq b(\bar{x}, \bar{y})$ при $b \in B$. Тогда получим, что B B -выпуклое множество.

Отметим, что $\sup_{b \in B} b(x, y) \geq \sup_{p \in B_1^*, q \in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\| \|y\|$, где $B_1^* = \{p \in X : \|p\| \leq 1\}$, $B_2^* = \{q \in Y^* : \|q\| \leq 1\}$.

Известно, что $\sup_{b \in B} b(x \otimes y) = \|(x \otimes y)\| = \|x\| \|y\| \geq \sup_{p \in B_1^*, q \in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\| \|y\|$, т.е.

$$\sup_{b \in B} b(x, y) = \sup_{p \in B_1^*, q \in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\| \|y\|.$$

Пример 2.3. Если $b \in B(R \times R, R)$, то существует число $\alpha \in R$ такое, что $b(x, y) = \alpha xy$. Из примера 2.1 и 2.2 следует, что $\{\alpha xy : \alpha \in [-1; 1]\}$ и $\{\beta xy : \beta \in [2; 3]\}$ В-выпуклое множество. Также получим, что $\{\alpha xy : \alpha \in [-1; 1]\} + \{\beta xy : \beta \in [2; 3]\} = \{vxy : v \in [1; 4]\}$ В-выпуклое множество.

Лемма 2.10. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ непрерывные бисублинейные четные функции, $\bar{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то для каждого $z^* \in \partial_2 q_2$ существуют число $\bar{\alpha}$, $\bar{b} \in \partial_2 q_2$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такие, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < x^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$.

Доказательство. Пусть $z^* \in \partial_2 q_2$. Так как $\bar{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то отсюда следует, что $\bar{x}^* - z^* \notin \partial_2 q_1$. Если $\bar{x}^* - z^* \notin \partial_2 q_1$, то существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $q_1(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть число α такое, что $q_1(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда $q_1(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{x^*(\bar{x}, \bar{y}) : x^* \in \partial_2 q_1\} < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда имеем, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$. Пусть $\bar{b} \in \partial_2 q_2$ такой, что $\bar{b}(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{b(\bar{x}, \bar{y}) : b \in \partial_2 q_2\}$. Тогда получим, что $\bar{b}(\bar{x}, \bar{y}) \geq b(\bar{x}, \bar{y})$ при $b \in \partial_2 q_2$. Поэтому $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < x^*(\bar{x}, \bar{y}) - z^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$, где $\bar{\alpha} = \alpha + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма доказана.

Следствие 2.5. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ непрерывные бисублинейные четные функции, $\bar{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ и $0 \in \partial_2 q_2$, то существуют число $\bar{\alpha}$, $\bar{b} \in \partial_2 q_2$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такие, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < x^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$.

Из соотношения $x^*(\bar{x}, \bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{\alpha} < x^*(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$ следует, что $\bar{x}^* + \bar{b} \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$.

Теорема 2.2. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции и множество $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ В-выпукло, то $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 = \partial_2(q_1 + q_2)$.

Доказательство. Если q_1, q_2 бисублинейные функции из $X \times Y$ в R , то из определения бисубдифференциала следует, что $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 \subset \partial_2(q_1 + q_2)$.

Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то из следствия 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} q_1(x, y) + q_2(x, y) &= \max\{b_1(x, y) : b_1 \in \partial_2 q_1\} + \max\{b_2(x, y) : b_2 \in \partial_2 q_2\} = \\ &= \max\{b(x, y) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} = \max\{b(x, y) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\} \end{aligned}$$

при $(x, y) \in X \times Y$. Пусть существует $\bar{b} \in \partial_2(q_1 + q_2)$ такой, что $\bar{b} \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$. Так как $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ В-выпукло, то существуют $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ и $\alpha \in R$ такие, что $b(\bar{x}, \bar{y}) < \alpha < \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$ при $b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$. Поэтому $\max\{b(\bar{x}, \bar{y}) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} \leq \alpha < \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует, что $q_1(\bar{x}, \bar{y}) + q_2(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{b}(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому $\bar{b} \notin \partial_2(q_1 + q_2)$. Получим противоречие. Лемма доказана.

Из теоремы Херманнера (см. [11, с.203]) следует, что верна следующая лемма.

Лемма 2.11. Если $q_1 : X \rightarrow R$ и $q_2 : Y \rightarrow R$ сублинейные неотрицательные непрерывные четные функции, то $q(x, y) = q_1(x)q_2(y)$ бисублинейная неотрицательная непрерывная четная функция и

$$q(x, y) = \max_{(x^*, y^*) \in \partial q_1 \times \partial q_2} x^*(x)y^*(y)$$

при $(x, y) \in X \times Y$, где $\partial q_1 = \{x^* \in X^* : q_1(x) \geq x^*(x)$ при $x \in X\}$, $\partial q_2 = \{y^* \in Y^* : q_2(y) \geq y^*(y)$ при $y \in Y\}$.

Отметим, что если $q : X \rightarrow R$ сублинейная непрерывная четная функция, то $q(x) \geq 0$ при $x \in X$.

Пусть X и Y действительные линейные пространства и $q : X \times Y \rightarrow R$. Множество всех билинейных функций из $X \times Y$ в R обозначим через $\tilde{B}(X \times Y, R)$.

Отметим, что $(X \otimes Y)' = \tilde{B}(X \times Y, R)$, где через $(X \otimes Y)'$ обозначено алгебраическое сопряженное пространство к $X \otimes Y$. Обозначим $z^*(v) = b(v) = \sum_{i=1}^k b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^k x^i \otimes y^i$, где $b \in \tilde{B}(X \times Y, R)$.

Положим $\partial_2^a q = \{b \in \tilde{B}(X \times Y, R) : q(x, y) \geq b(x, y) \text{ при } (x, y) \in X \times Y\}$,

$$\partial^a \bar{q} = \{z^* \in (X \otimes Y)': \bar{q}(v) \geq z^*(v) \text{ при } v \in X \otimes Y\}.$$

Лемма 2.12. Если X и Y линейные пространства, $q: X \times Y \rightarrow R$ бисублинейная четная функция, то $b \in \tilde{B}(X \times Y, R)$ принадлежит $\partial_2^a q$ в том и только в том случае, когда $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ принадлежит $z^* \in \partial^a \bar{q}$.

Доказательство. Если $b \in \partial_2^a q$, то положив $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \otimes y^i$, где $n \in N$, получим, что $\sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) \geq \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$. Отсюда имеем, что $\bar{q}(v) \geq z^*(v)$ при $v \in X \otimes Y$. Поэтому $z^* \in \partial^a \bar{q}$. Обратно, если $z^* \in \partial^a \bar{q}$, то из представления $z^*(v) = \sum_{i=1}^n b(x^i, y^i)$, где $n \in N$, следует, что $z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$ и $q(x, y) = \bar{q}(x \otimes y) \geq z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда следует, что $b \in \partial_2^a q$. Лемма доказана.

Если $q: X \times Y \rightarrow R$ четная бисублинейная функция, то $\bar{q}(x \otimes y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$ и $\bar{q}: X \otimes Y \rightarrow R$ сублинейная функция. Тогда из 0.2.20 (2) [12] следует, что

$$\bar{q}(v) = \max_{z^* \in \partial^a \bar{q}} z^*(v)$$

при $v \in X \otimes Y$. Так как $z^*(x \otimes y) = b(x, y)$ и $q(x, y) = \bar{q}(x \otimes y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, то отсюда следует, что

$$q(x, y) = \max_{b \in \partial_2^a q} b(x, y)$$

при $(x, y) \in X \times Y$.

Если X и Y действительные банаховы пространства, $q: X \times Y \rightarrow R$ бисублинейная непрерывная четная функция, то имеем, что $q(x, y) = \max_{b \in \partial_2^a q} b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда следует, что $q(x, y) \geq b(x, y)$

при $(x, y) \in X \times Y$ и $b \in \partial_2^a q$. Поэтому $b(x, y)$ раздельно непрерывная функция. Тогда из теоремы 2.17[13] получим, что $b \in B(X \times Y, R)$. Поэтому еще раз получим, что $q(x, y) = \max_{b \in \partial_2^a q} b(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$.

3. Бисопряженная функция и его применение к бисубдифференцируемости бивыпуклых функций

В п.3 исследуется бисубдифференцируемость бивыпуклых функций и изучен ряд их свойств. В п.3 исследован также ряд свойств бисопряженных функций.

Пусть X и Y линейные пространства. Множество $C \subset X \times Y$ называется бивыпуклой, если для любого $x \in X$ и $y \in Y$ множества $C_x = \{\bar{y} : (x, \bar{y}) \in C\}$ и $C_y = \{\bar{x} : (\bar{x}, y) \in C\}$ выпуклые. Если C бивыпуклое множество, функция $f(\cdot, y): C_y \rightarrow R$ и $f(x, \cdot): C_x \rightarrow R$ выпуклые при $(x, y) \in C$, то функция $f: C \rightarrow R$ называется бивыпуклой.

Если $f: C \rightarrow R$, то положим $2 - \text{ep} f = \{((x, \alpha), (y, \beta)) : (x, y) \in C, \alpha, \beta \in R, f(x, y) \leq \alpha\beta\}$.

Следующие утверждения доказываются аналогично соответствующим утверждениям выпуклого анализа (см. [11,14]).

- 1) Функция $f: C \rightarrow R$ бивыпукла на C тогда и только тогда, когда множество $2 - \text{ep} f$ бивыпукло.
- 2) Если $C \subset X \times Y$, $f_i: C \rightarrow R$, $i \in I$, семейства функций и $g(x, y) = \sup\{f_i(x, y) : i \in I\}$, то $2 - \text{ep} g = \bigcap_{i \in I} 2 - \text{ep} f_i$.
- 3) Пересечение бивыпуклых множеств бивыпукло.

4) Если $C \subset X \times Y$ бивыпуклое множество, $f_i: C \rightarrow R$, $i \in I$, семейства бивыпуклых функций и $g(x, y) = \sup\{f_i(x, y) : i \in I\} < +\infty$, то функция $g(x, y)$ бивыпукла.

5) $C \subset X \times Y$ бивыпуклое множество тогда и только тогда, когда $\delta_C(x, y) = \begin{cases} 0 : (x, y) \in C, \\ +\infty : (x, y) \notin C \end{cases}$ бивыпук-
лая функция.

Функция $f: X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ называется бивыпуклой (или 2-выпуклой), если функции $x \rightarrow f(x, y)$, $y \rightarrow f(x, y)$ выпуклые.

Функция $f : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ бивыпуклая функция тогда и только тогда, когда множество $2 - ep f = \{((x, \alpha), (y, \beta)) \in (X \times R) \times (Y \times R) : f(x, y) \leq \alpha\beta\}$ бивыпуклое множество.

Лемма 3.1. Если $f : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ бивыпуклая функция и $\alpha \in R$, то множество $C = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) \leq \alpha\}$ бивыпуклое множество.

Доказательство. Если $(x_1, y), (x_2, y) \in C$, то $f(x_1, y) \leq \alpha$, $f(x_2, y) \leq \alpha$. Поэтому если $\lambda \in [0,1]$, то имеем, что

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \leq \lambda f(x_1, y) + (1-\lambda)f(x_2, y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$$

Отсюда следует, что $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \in C$.

Аналогично имеем, что из $(x, y_1), (x, y_2) \in C$ и $\lambda \in [0,1]$ следует, что $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in C$. Поэтому C бивыпуклое множество. Лемма доказана.

Если $x^* \in B(X \times Y, R)$, то легко проверяется $C = \{(x, y) \in X \times Y : x^*(x, y) = d\}$ бивыпуклое множество.

Лемма 3.2. Если $f : X \otimes Y \rightarrow R_{+\infty}$ выпуклая функция, то $g(x, y) = f(x \otimes y)$ бивыпуклая функция из $X \times Y$ в $R_{+\infty}$.

Доказательство. Если $(x_1, y), (x_2, y) \in X \times Y$, $\lambda \in [0,1]$, то

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) &= f((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \otimes y) = f(\lambda x_1 \otimes y + (1-\lambda)x_2 \otimes y) \leq \\ &\leq \lambda f(x_1 \otimes y) + (1-\lambda)f(x_2 \otimes y) = \lambda g(x_1, y) + (1-\lambda)g(x_2, y). \end{aligned}$$

Если $(x, y_1), (x, y_2) \in X \times Y$, $\lambda \in [0,1]$, то аналогично имеем

$$g(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda g(x, y_1) + (1-\lambda)g(x, y_2).$$

Поэтому $g(x, y)$ бивыпуклая функция из $X \times Y$ в $R_{+\infty}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $D \subset \{x \otimes y : (x, y) \in X \times Y\}$ выпуклое множество и $C = \{(x, y) \in X \times Y : x \otimes y \in D\}$, то C бивыпуклое множество.

Доказательство. Пусть $(x_1, y), (x_2, y) \in C$. Так как $(x_1 \otimes y), (x_2 \otimes y) \in D$ и D выпуклое множество и $\lambda \in [0,1]$, то $\lambda(x_1 \otimes y) + (1-\lambda)(x_2 \otimes y) = \lambda x_1 \otimes y + (1-\lambda)(x_2 \otimes y) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \otimes y \in D$

Отсюда следует, что $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \in C$.

Аналогично имеем, что из $(x, y_1), (x, y_2) \in C$ и $\lambda \in [0,1]$ следует, что $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in C$. Лемма доказана.

Пусть X и Y банаховы пространства, $R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$ и $q : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ бивыпуклая функция. Обозначим $\text{dom } q = \{(x, y) \in X \times Y : q(x, y) < +\infty\}$. Легко проверяется, что, если q бивыпуклая функция, то $\text{dom } q$ -бивыпуклое множество. Бисубдифференциалом функции q в точке $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{dom } q$ назовем следующее множество

$$\partial_2 q(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in B(X \times Y, R) : q(x, y) - q(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y\}.$$

Пусть $x^* \in B(X \times Y, R)$, $q : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$. Положим

$$q^*(x^*) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{x^*(x, y) - q(x, y)\}.$$

Лемма 3.4. Если q бивыпуклая функция, то $x^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(x^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Если $x^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$, то $x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому

$x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{x^*(x, y) - q(x, y)\}$, т.е. $q^*(x^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$. Наоборот, если

$$q^*(x^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y}), \text{ то}$$

$$\sup_{(x, y) \in X \times Y} \{x^*(x, y) - q(x, y)\} = x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q(\bar{x}, \bar{y}).$$

Поэтому $x^*(x, y) - q(x, y) \leq x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in X \times Y$, т.е.

$q(x, y) - q(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in X \times Y$. Лемма доказана.

Положим

$$q^*(x^*) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} \{x^*(x, y) - q(x, y)\}, \quad q^{**}(x, y) = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{x^*(x, y) - q^*(x^*)\}.$$

Так как для каждой пары $(x, y) \in X \times Y$, отображение $x^* \rightarrow x^*(x, y)$ линейный непрерывный функционал на $B(X \times Y, R)$, то из определения вытекает, что $x^* \rightarrow q^*(x^*)$ выпуклая функция.

Ясно, что $(x, y) \rightarrow x^*(x, y) - q^*(x^*)$ бивыпуклая функция. Поэтому из предложения 2.2 [15] вытекает, что $(x, y) \rightarrow q^{**}(x, y)$ бивыпуклая функция.

Так как $q^*(x^*) \geq x^*(x, y) - q(x, y)$, то имеем, что $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) \leq q(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in X \times Y$. Ясно, что

$$q^*(0) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} \{-q(x, y)\}, \quad q^{**}(x, 0) = q^{**}(0, y) = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{-q^*(x^*) : x^* \in B(X \times Y, R)\}.$$

Отметим, что функция $q : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ называется собственной, если $\text{dom } q \neq \emptyset$. Далее считаем, что все рассмотренные функции собственные.

Отметим, что ряд свойств бисопряженных функций аналогичен свойствам сопряженных функций (см. [11,14]).

Лемма 3.5. Если $\partial_2 q(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, то $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Из леммы 3.4 вытекает, что $\bar{x}^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(\bar{x}^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому

$$q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(x^*)\} \geq \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(\bar{x}^*) = \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y}),$$

т.е. $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) \geq q(\bar{x}, \bar{y})$. Так как $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) \leq q(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. Если $q(x, y) = q_1(x, y) + q_2(x, y)$ и $\partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$ и $\partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, то $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q_1^{**}(\bar{x}, \bar{y}) + q_2^{**}(\bar{x}, \bar{y})$

Доказательство. Так как $\partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $\partial_2 q(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$. Тогда из леммы 3.5 вытекает, что $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y})$, $q_1^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q_1(\bar{x}, \bar{y})$, $q_2^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q_2(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда получим справедливость следствия 3.1.

По определению субдифференциала имеем, что $\partial q^*(\bar{x}^*)$ принадлежит $X \otimes Y$.

Элемент $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ называется субградиентом функции $q^*(x^*)$ в точке \bar{x}^* , если

$$q^*(x^*) - q^*(\bar{x}^*) \geq x^*(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$$

при всех $x^* \in B(X \times Y, R)$, а множество субградиентов называется субдифференциалом функции q^* в точке \bar{x}^* и обозначается $\partial q^*(\bar{x}^*)$.

Пусть $(x_1 \otimes y_1), (x_2 \otimes y_2) \in \partial q^*(\bar{x}^*)$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$q^*(x^*) - q^*(\bar{x}^*) \geq \alpha(x^*(x_1, y_1) - \bar{x}^*(x_1, y_1)) + (1 - \alpha)(x^*(x_2, y_2) - \bar{x}^*(x_2, y_2)),$$

т.е. $\alpha x_1 \otimes y_1 + (1 - \alpha)x_2 \otimes y_2 \in \partial q^*(\bar{x}^*)$, т.е. $\partial q^*(\bar{x}^*)$ выпуклое множество.

Далее элемент $\bar{x} \otimes \bar{y}$ будем отождествлять элементом (\bar{x}, \bar{y}) .

Лемма 3.6. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial q^*(\bar{x}^*)$ тогда и только тогда, когда

$$q^*(\bar{x}^*) + q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}).$$

Доказательство. Если $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial q^*(\bar{x}^*)$, то по определению имеем, что

$$\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(\bar{x}^*) \geq x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(x^*)$$

при $x^* \in B(X \times Y, R)$. Отсюда вытекает, что $\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(\bar{x}^*) = q^{**}(\bar{x}, \bar{y})$.

Обратно, если $q^*(\bar{x}^*) + q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что

$$\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(\bar{x}^*) = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(x^*)\}.$$

Поэтому $\bar{x}^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(\bar{x}^*) \geq x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q^*(x^*)$ при $x^* \in B(X \times Y, R)$, т.е. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial q^*(\bar{x}^*)$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. Для любой функции $q : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ выполнено равенство $q^* = q^{***}$.

Доказательство. Так как $q^{**}(x, y) \leq q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$, то из определения сопряженной функции следует, что $q^{***} \geq q^*$. Наоборот, из определения q^{**} вытекает, что $q^{**}(x, y) \geq x^*(x, y) - q^*(x^*)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому

$$q^{***}(x^*) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} \{x^*(x, y) - q^{**}(x, y)\} \leq q^*(x^*).$$

Так как $q^{***} \geq q^*$ и $q^{***} \leq q^*$, то имеем, что $q^* = q^{***}$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 3.6 проверяется, что $x^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(x^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$; $x^* \in \partial_2 q^{**}(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^{***}(x^*) + q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$.

Отсюда следует следующее следствие.

Следствие 3.2. Если $q(\bar{x}, \bar{y}) = q^{**}(\bar{x}, \bar{y})$, то $\partial_2 q(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_2 q^{**}(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 3.3. Для любой функции $q : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ из $x^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$ вытекает, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial q^*(x^*)$.

Доказательство. Так как $x^* \in \partial_2 q(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $q^*(x^*) + q(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$. Также по лемме 3.5 получим, что $q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда $q^*(x^*) + q^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$. По лемме 3.6 отсюда вытекает, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial q^*(x^*)$. Следствие доказано.

Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$, то

$$(q_1 + q_2)^*(x^*) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{x^*(x,y) - q_1(x,y) - q_2(x,y)\} \leq \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{x^*(x,y) - x_1^*(x,y) - q_1(x,y)\} + \\ + \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{x_1^*(x,y) - q_2(x,y)\} = q_1^*(x^* - x_1^*) + q_2^*(x_1^*)$$

при $x^* \in B(X \times Y, R)$. Поэтому

$$(q_1 + q_2)^*(x^*) \leq \inf_{x_1^* \in B(X \times Y, R)} \{q_1^*(x^* - x_1^*) + q_2^*(x_1^*)\} = \inf_{\substack{z_1^*, z_2^* \in B(X \times Y, R), \\ z_1^* + z_2^* = x^*}} \{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}.$$

Положим

$$(q_1^* \nabla q_2^*)(x^*) = \inf_{\substack{z_1^*, z_2^* \in B(X \times Y, R), \\ z_1^* + z_2^* = x^*}} \{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}.$$

Лемма 3.8. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$, то $(q_1^* \nabla q_2^*)^*(\bar{x}, \bar{y}) = q_1^{**}(\bar{x}, \bar{y}) + q_2^{**}(\bar{x}, \bar{y})$ при $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$.

Доказательство. Если $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, то

$$(q_1^* \nabla q_2^*)^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{x^*(\bar{x}, \bar{y}) - (q_1^* \nabla q_2^*)(x^*)\} = \\ = \sup_{x^* \in B(X \times Y, R)} \{x^*(\bar{x}, \bar{y}) - \inf_{\substack{z_1^*, z_2^* \in B(X \times Y, R), \\ z_1^* + z_2^* = x^*}} \{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}\} = \\ = \sup_{z_1^*, z_2^* \in B(X \times Y, R)} \{z_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + z_2^*(\bar{x}, \bar{y}) - q_1^*(z_1^*) - q_2^*(z_2^*)\} = q_1^{**}(\bar{x}, \bar{y}) + q_2^{**}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то $\partial_2(q_1 + q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$

в том и только в том случае, когда $(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$.

Доказательство. Если $q_1 : X \times Y \rightarrow R$ и $q_2 : X \times Y \rightarrow R$ четные бисублинейные непрерывные функции и $x^* \in \partial_2 q_1$, то $x^*(x, y) - q_1(x, y) \leq 0$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому

$$q_1^*(x^*) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{x^*(x,y) - q_1(x,y)\} \leq 0 = x^*(0,0) - q_1(0,0) \leq q_1^*(x^*).$$

Отсюда следует, что $q_1^*(x^*) = 0$.

Если $x^* \notin \partial_2 q_1$, то существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ такая, что $x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q_1(\bar{x}, \bar{y}) > 0$. Поэтому

$q_1^*(x^*) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} \{x^*(x,y) - q_1(x,y)\} \geq \sup_{\lambda \geq 0} \{x^*(\lambda \bar{x}, \bar{y}) - q_1(\lambda \bar{x}, \bar{y})\} = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \{x^*(\bar{x}, \bar{y}) - q_1(\bar{x}, \bar{y})\} = +\infty$. Получим,

что

$$q_1^*(x^*) = \begin{cases} 0: x^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty: x^* \notin \partial_2 q_1. \end{cases}$$

Аналогично имеем, что

$$q_2^*(x^*) = \begin{cases} 0: x^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty: x^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} \text{ и } (q_1 + q_2)^*(x^*) = \begin{cases} 0: x^* \in \partial_2(q_1 + q_2), \\ +\infty: x^* \notin \partial_2(q_1 + q_2). \end{cases}$$

Если $(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$, то

$$\begin{cases} 0: x_1^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty: x_1^* \notin \partial_2 q_1 \end{cases} + \begin{cases} 0: x_2^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty: x_2^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: x_1^* + x_2^* \in \partial_2(q_1 + q_2), \\ +\infty: x_1^* + x_2^* \notin \partial_2(q_1 + q_2). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 0: x_1^* + x_2^* \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2, \\ +\infty: x_1^* + x_2^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: x_1^* + x_2^* \in \partial_2(q_1 + q_2), \\ +\infty: x_1^* + x_2^* \notin \partial_2(q_1 + q_2). \end{cases}$$

Поэтому $\partial_2(q_1 + q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$.

Обратно, если $\partial_2(q_1 + q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то

$$\begin{cases} 0: x_1^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty: x_1^* \notin \partial_2 q_1 \end{cases} + \begin{cases} 0: x_2^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty: x_2^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: x_1^* + x_2^* \in \partial_2(q_1 + q_2), \\ +\infty: x_1^* + x_2^* \notin \partial_2(q_1 + q_2). \end{cases}$$

Поэтому $(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$. Теорема доказана.

Если $q: X \times Y \rightarrow R$ четная бисублинейная функция, то $q^*(x^*) = \begin{cases} 0: x^* \in \partial_2 q, \\ +\infty: x^* \notin \partial_2 q. \end{cases}$ Поэтому если

$\partial_2 q(x, y) \neq \emptyset$ при $(x, y) \in X \times Y$, то из следствия 3.1 вытекает, что

$$q(x, y) = q^{**}(x, y) = \sup\{x^*(x, y) : x^* \in \partial_2 q\}.$$

Теорема 3.2. Если $q_1: X \times Y \rightarrow R$ и $q_2: X \times Y \rightarrow R$ бивыпуклые функции, $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ и $\partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, $\partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, то

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$$

в том и только в том случае, когда для $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$ существуют $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$ и $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$.

Доказательство. Из определения бисубдифференциала следует, что $\partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$. (3.1)

Так как $\partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, $\partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, то имеем, что $\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$. Пусть $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда по лемме 3.4 получим, что $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $(q_1 + q_2)^*(x^*) + (q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$. По условию существует $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$ и $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$, то имеем, что

$$q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*) + (q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = x_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + x_2^*(\bar{x}, \bar{y}). \quad (3.2)$$

Так как

$$q_1^*(x_1^*) + q_1(\bar{x}, \bar{y}) \geq x_1^*(\bar{x}, \bar{y}), \quad q_2^*(x_2^*) + q_2(\bar{x}, \bar{y}) \geq x_2^*(\bar{x}, \bar{y})$$

то из (3.2) следует, что $q_1^*(x_1^*) + q_1(\bar{x}, \bar{y}) = x_1^*(\bar{x}, \bar{y})$, $q_2^*(x_2^*) + q_2(\bar{x}, \bar{y}) = x_2^*(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда по лемме 3.4 получим, что $x_1^* \in \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3) следует, что

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y}).$$

Обратно $\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$ и $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$, $x_1^* \in \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$, то из леммы 3.4 следует, что

$$(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) + (q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1^* + x_2^*)(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.4)$$

$$q_1^*(x_1^*) + q_1(\bar{x}, \bar{y}) = x_1^*(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.5)$$

$$q_2^*(x_2^*) + q_2(\bar{x}, \bar{y}) = x_2^*(\bar{x}, \bar{y}). \quad (3.6)$$

Отнимая из (3.4) соотношения (3.5) и (3.6) получим, что

$$(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*).$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует следующее следствие

Следствие 3.4. Если $\partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$, $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\bar{x}, \bar{y})$, $x_1^* \in \partial_2 q_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$, то $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$.

4. Условия экстремума в бивыпуклом программировании

Пусть X и Y банаховы пространства, $f: X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ бивыпуклая функция.

Теорема 4.1. Для того чтобы $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f: X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Если $f(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y)$, то $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому

$f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда следует, что $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$.

Обратно, если $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$, то $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ при $(x, y) \in X \times Y$. Отсюда следует, что

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y). \text{ Теорема доказана.}$$

Если $f(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y)$, то получим, что

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = -\max_{(x, y) \in X \times Y} \{-f(x, y)\} = -f^*(0).$$

Получим, что $f(\bar{x}, \bar{y}) + f^*(0) = 0$. Отсюда также следует, что $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$.

Так как $\partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, то из леммы 3.5 следует, что $f^{**}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому $f^{**}(\bar{x}, \bar{y}) + f^*(0) = 0$.

Тогда из леммы 3.6 следует, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial f^*(0)$.

Следствие 4.1. Если бивыпуклая функция f достигает на $X \times Y$ в точке (\bar{x}, \bar{y}) минимума, то $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial f^*(0)$.

Пусть X и Y банаховы пространства, $C \subset X \times Y$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$. Положим

$$\delta_C(x, y) = \begin{cases} 0; & (x, y) \in C, \\ +\infty; & (x, y) \notin C. \end{cases}$$

Множество $\partial_2 \delta_C(\bar{x}, \bar{y})$ назовем бинормальным конусом к C в точке (\bar{x}, \bar{y}) и обозначим через $\Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$. Из определения $\partial_2 \delta_C(\bar{x}, \bar{y})$ имеем

$$\Omega_C(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in B(X \times Y, R): x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0, \forall (x, y) \in C\}.$$

Из определения $\Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$ следует, что $x^* \in \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда $\sup\{x^*(x, y) : (x, y) \in C\} = x^*(\bar{x}, \bar{y})$.

Если $A \subset B(X \times Y, R)$, то положим $\text{con } A = \{\lambda x^* : x^* \in A, \lambda \geq 0\}$.

Лемма 4.1. Если $g : X \times Y \rightarrow R$, $C = \{(x, y) \in X \times Y : g(x, y) \leq g(\bar{x}, \bar{y})\}$, то $\text{con } \partial_2 g(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Если $x^* \in \partial_2 g(\bar{x}, \bar{y})$, то $g(x, y) - g(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому $0 \geq g(x, y) - g(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in C$, т.е. $x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$ при $(x, y) \in C$. Получим, что $\partial_2 g(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть $\lambda \geq 0$ и $x^* \in \partial_2 g(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда $\lambda x^*(x, y) - \lambda x^*(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$ при $(x, y) \in C$, т.е. $\text{con } \partial_2 g(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма доказана.

Рассмотрим задачу

$$f(x, y) \rightarrow \min, \quad (x, y) \in C \tag{4.1}$$

Следствие 4.2. Пусть C бивыпуклое множество. Для того чтобы $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ в множестве C , необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \partial_2(f + \delta_C)(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. По условию C бивыпуклое множество. Поэтому $\delta_C(x, y)$ бивыпуклая функция. Тогда получим, что $(f + \delta_C)(x, y)$ также бивыпуклая функция. Из теоремы 4.1 следует, что для того, чтобы $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f + \delta_C : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$ во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \partial_2(f + \delta_C)(\bar{x}, \bar{y})$. Следствие доказано.

Лемма 4.2. Если $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) + \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$, то $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ является решением задачи (4.1).

Доказательство. Если $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) + \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_2 \delta_C(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует, что существуют $x_1^* \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 \delta_C(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что $x_1^* + x_2^* = 0$. Тогда получим, что

$$f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \geq x_1^*(x, y) - x_1^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y,$$

$$\delta_C(x, y) - \delta_C(\bar{x}, \bar{y}) \geq x_2^*(x, y) - x_2^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y.$$

Сложив этих соотношений, имеем, что

$$f(x, y) + \delta_C(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \delta_C(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \text{ при } (x, y) \in X \times Y.$$

Отсюда следует, что точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ является решением задачи (4.1). Лемма доказана.

Пусть $f_0 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$, $f_1 : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$, ..., $f_k : X \times Y \rightarrow R_{+\infty}$, $C \subset X \times Y$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x, y) \rightarrow \min \tag{4.2}$$

$$f_1(x, y) \leq 0, \dots, f_k(x, y) \leq 0, \tag{4.3}$$

$$(x, y) \in C. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2(достаточное условие). Пусть точка (\bar{x}, \bar{y}) удовлетворяют условиям (4.3), (4.4) и найдутся не равные одновременно нулю числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ такие, что

$$0 \in \partial_2 f_0(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_1 \partial_2 f_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + \lambda_k \partial_2 f_k(\bar{x}, \bar{y}) + \Omega_C(\bar{x}, \bar{y}) \quad (4.5)$$

$$\lambda_i f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ при } i = 1, \dots, k, \quad (4.6)$$

то (\bar{x}, \bar{y}) является решением задачи (4.2) - (4.4).

Доказательство. Положим $C_i = \{(x, y) \in X \times Y : f_i(x, y) \leq 0\}$ и $I(\bar{x}, \bar{y}) = \{i \in \overline{1, k} : f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$.

Ясно, что, если $i \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, то $f_i(\bar{x}, \bar{y}) < 0$. Поэтому $\lambda_i = 0$ при $i \notin I(\bar{x}, \bar{y})$. Если $i \in I(\bar{x}, \bar{y})$, то

$$C_i = \{(x, y) \in X \times Y : f_i(x, y) \leq 0\} = \{(x, y) \in X \times Y : f_i(x, y) \leq f_i(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Тогда из леммы 4.1 следует, что $\operatorname{con} \partial_2 f_i(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega_{C_i}(\bar{x}, \bar{y})$ при $i \in I(\bar{x}, \bar{y})$.

Из (4.5) следует, что существует $x_0^* \in \partial_2 f_0(\bar{x}, \bar{y})$, $x_1^* \in \partial_2 f_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, x_k^* \in \partial_2 f_k(\bar{x}, \bar{y})$ и $x^* \in \Omega_C(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что $x_0^* + \lambda_1 x_1^* + \dots + \lambda_k x_k^* + x^* = 0$. Так как $\operatorname{con} \partial_2 f_i(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega_{C_i}(\bar{x}, \bar{y})$ при $i \in I(\bar{x}, \bar{y})$, то имеем, что $\lambda_i x_i^* \in \Omega_{C_i}(\bar{x}, \bar{y})$ при $i \in I(\bar{x}, \bar{y})$. Если $i \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, то $\lambda_i = 0$. Поэтому $\lambda_i x_i^* = 0 \in \Omega_{C_i}(\bar{x}, \bar{y})$ при $i \notin I(\bar{x}, \bar{y})$.

Тогда получим, что $\lambda_i x_i^* \in \Omega_{C_i}(\bar{x}, \bar{y})$ при $i = 1, \dots, k$. Поэтому имеем

$$f_0(x, y) - f_0(\bar{x}, \bar{y}) \geq x_0^*(x, y) - x_0^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y,$$

$$\delta_{C_i}(x, y) - \delta_{C_i}(\bar{x}, \bar{y}) \geq \lambda_i x_i^*(x, y) - \lambda_i x_i^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y$$

при $i = 1, \dots, k$ и

$$\delta_C(x, y) - \delta_C(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y.$$

Отсюда следует, что

$$f_0(x, y) + \sum_{i=1}^k \delta_{C_i}(x, y) + \delta_C(x, y) - f_0(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{i=1}^k \delta_{C_i}(\bar{x}, \bar{y}) - \delta_C(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$$

при $(x, y) \in X \times Y$. Тогда получим, что $f_0(x, y) \geq f_0(\bar{x}, \bar{y})$ при $(x, y) \in C \cap (\bigcap_{i=1}^k C_i)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций. // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук., 1989, №6.- с.33-47.
2. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Баку, 1996.-148 с.
3. Садыгов М.А. О геометрических аспектах субдифференциала второго порядка. // ДАН Азерб., 2001, N 4-6.- с.35-39.
4. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. - Баку, Элм, 2002.-125 с.
5. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций. - Баку, Элм, 2007.- 224 с.
6. Садыгов М.А. n -выпуклые и n -положительно однородные функции. - Баку, «Муаллим» LTD, 2008.- 115 с.
7. Свойства n -положительно однородных функций. // Доклады НАН Азерб., №1, 2012. - с. 24-30.
8. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.- 359 р.
9. Хелемский А.Я. Гомология в банаевых и топологических алгебрах. - Издат.-во МГУ, 1986.-288с.
10. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства. - М.: Мир, 1967.- 256 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.- 479 с.
12. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - М.: Наука, 1985.- 256 с.
13. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 443 с.
14. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975.- 496 с.
15. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М.: Мир, 1988.- 264 с.
16. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. - М.: Наука, 1988.- 280 с.

PEDAGOGICAL SCIENCES

ORGANIZATIONAL AND PEDAGOGICAL ASPECTS OF THE DEVELOPMENT OF SANOGENIC THINKING IN STUDENTS

Abdullayeva Muyassar Isakovna
Teacher of institut TMS in Tashkent
[DOI: 10.5281/zenodo.8364903](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364903)

ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ САНОГЕННОГО МЫШЛЕНИЯ У СТУДЕНТОВ

Абдуллаева Муяссар Исаковна
Преподаватель института ТМС в Ташкенте

Abstract

The article covers organizational, legal, pedagogical and psychological aspects of the development of sanogenic thinking of students. Pedagogical and psychological possibilities for the development of sanogenic thinking of students are explored by proposing ways to achieve a high level of spiritual, mental and physical health.

Аннотация

В статье освещено об организационных, правовых, педагогических и психологических аспектах развития саногенного мышления студентов. Педагогические и психологические возможности развития саногенного мышления студентов исследуются путем предложения путей достижения высокого уровня духовного, психического и физического здоровья.

Keywords: Sanogenic thinking, psychological and pedagogical aspect, student, healthcare.

Ключевые слова: Саногенное мышление, психолого-педагогический, аспект, студент, здравоохранение.

An important factor in the social stability that has developed in the world is the preservation of the spiritual, physical and mental health of young people, who are the heirs of our national culture, the formation of a healthy, socially stable, adapted to living conditions and happy personality. In this regard, the most appropriate approach to ensuring human health in the education system is the health approach, which describes the characteristics of the impact of education on the health of participants in the educational process and health. Activity through the organization of a (sanogenic) educational environment acquires current importance.

In recent years, there has been an increase in the quality and efficiency of the education system in our country, the formation of modern knowledge and skills among students and young people, close cooperation and integration of the education system and the field of science and education. ensure integrity and continuity. In particular, since one of the priority tasks of the education system of our republic is a responsible attitude towards one's health and the health of others in the educational process as a high social value, all aspects of students' activities are aimed at achieving a high level of spiritual development., mental, physical health.

Article 46, paragraph 4, of the Law "On Education" states that "taking into account the psychological and unique characteristics, physical and mental health, physiological development of students, physical, mental, sensory (sense) or focusing on creating conditions for the education of persons with mental deviations" [1]. From this point of view, when

preparing future teachers for professional activities, it is necessary to realize their health potential, develop sanogenic thinking, and provide methodological recommendations for avoiding various factors that are harmful to their health during the educational process. In future teaching activities, it is necessary to create a sanogenic environment to promote a healthy lifestyle..

Article 47, paragraph 5 of the Decree of the President of the Republic of Uzbekistan dated January 28, 2022 "On the Development Strategy of the new Uzbekistan for 2022-2026": have the necessary conditions taking into account physiological development" [2]. To do this, universities must pay attention to the mental and emotional characteristics of students in the educational process, increase the efficiency of professional and methodological work that is important for their physiological development, and organize effective training against professional, psychological and physiological stress in the process of teaching practice..

As stated in the Decree of the President of the Republic of Uzbekistan dated April 29, 2019 No. PF-5712 "On approval of the Concept for the development of the public education system of the Republic of Uzbekistan until 2030," physically healthy and energetic education of the child with the aim of "popularizing the principles of healthy nutrition for schoolchildren" [3], with teaching the science "Children's Anatomy and Physiology", the characteristics of the child's body, the characteristics of the physiological processes occurring in them are healthy and it is necessary to give scientific and methodological recommendations for mastering the

principles of healthy nutrition and assess the competence of the practical application of these recommendations on the basis of independent tasks and in the process of teaching practice.

Global changes taking place in the education system of all developed countries of the world create a need for intellectually capable, healthy, creatively thinking specialists.

Before moving on to the description of sanogenic thinking, it is necessary to emphasize points aimed at preventing possible misunderstandings in the understanding of this term. In psychology, thinking is the mental process of modeling the patterns of the surrounding world based on axiomatic rules [1]. However, in psychology there are many other definitions.

For example: the highest stage of human data processing, the process of establishing connections between objects or events in the surrounding world; or - the process of reflecting important properties of objects, as well as connections between them, which lead to the emergence of ideas about objective reality. Debate over the definition continues to this day.

Thinking is the highest level of human knowledge; the process of cognition of the surrounding real world, the basis of which is education and constant replenishment of the stock of concepts and ideas; involves making new judgments (implementing conclusions).

In pathopsychology and neuropsychology, thinking is one of the highest mental functions. It is considered as an activity that has motivation, goals, actions and a system of operations, results and management.

In psychology, thinking is usually called a set of mental actions with the help of which a certain problem or task is solved in the mind. Thinking under the influence of need is activated from the moment when the goal is defined and in a certain situation an obstacle to achieving it appears: there are not enough means, knowledge or abilities to achieve the goal and satisfy the need. This thinking is the work of images, signs, symbols in the mind to make the right decision. When solving "from point A to point B" or any other task, thinking must develop a course of action that will lead to the desired result. In this case, the purpose of this thinking is determined by our need, situation and task.

But when we solve internal problems (for example, how to relieve pain and suffering from resentment, or jealousy, or experienced failure), then this is also thinking, but it changes its character, since it pursues not external, but internal goals, for example, achieving a more complete integration of our self-image and our actual behavior; and in some cases it is aimed at increasing joy and satisfaction in existence or achieving meaning in life. Unfortunately, this thinking has not been sufficiently studied in psychology. Those protective mechanisms with which the reader became acquainted earlier act as "involuntary thinking", the purpose of which is to reduce suffering. In sanogenic thinking, this process occurs consciously, voluntarily; the purpose of such thinking is also consciously determined. For example, I can think about a situation

so I don't get upset with others or get jealous of a friend. But the fact is that no one taught us this idea. Therefore, it is very important for the student to become familiar with how sanogenic thinking works..

But to better understand this, let's review our ideas about pathogenic thinking so that the differences can be more easily identified.

A figurative representation of situations in which certain life events occurred allows you to "play" them in your head. Anyone who often "replays" in his head the situation of failure, which he, for example, experienced in a past exam, unwittingly re-experiences the stress. Such negative reinforcement of one's own thoughts is a manifestation of pathogenic thinking that gives rise to illness and neurosis. Pathogenic thinking multiplies a person's suffering: after all, with the help of his thinking, he reproduces the situation of stress countless times, putting himself into a state of chronic stress that destroys the body [4].

Sanogenic thinking extinguishes the "negative charge" contained in memories of situations in which a person experienced suffering. It frees the images from this charge and thereby relieves the tension caused by it.

This occurs through the use of the extinction effect, when situations that were very unpleasant in the past are "played out" in the imagination in a state of rest and detachment. As a result, tolerance for previously traumatic situations increases and sensitivity to them decreases.

This does not mean that a person will become like a tree and ordinary stimuli will not act on him. But his peculiarity is that in a situation where he is offended, he will experience the offense, but then he will eliminate this offense much faster than someone who does not have this mindset.

The following features are characteristic of sanogenic thinking.

Firstly, the dynamism of the connection between our Self and the world of images that reflect life situations. On the one hand, the ability of the I to completely merge with them and charge them with energy and activity, when effective activity is required, complete immersion in activity, in communication, in creativity, as a result of which everything except the subject of activity disappears. This focus and absorption leads to increased efficiency and eliminates side emotions that interfere with performance. On the other hand, our Self is characterized by separation from situations and images saturated with negative emotional content. This feature of thinking manifests itself in reflection or introspection, in which our I makes the images themselves and emotional reactions to them the object of consideration.

The subject separates himself from his own experiences and observes them. This separation of the Self from feelings helps to weaken experiences and frees images from their "emotional energy." In fact, try to imagine from the outside how joy flows through you, and you will feel that joy has weakened or disappeared completely. Of course, when it comes to joy, we are sad

that it has disappeared. But the fact that the experience has disappeared is important.

Not only positive, but also negative experiences disappear if we make them the object of mental observation from the outside.

If I manage to consider myself as being offended, to imagine the internal structure of the offense that arose in a specific situation, then gradually the experience of offense disappears. This observation from the outside and replaying the situation of resentment can also be done in writing, which is often used by psychotherapists.

Secondly, with sanogenic thinking, introspection, or reflection directed inward, is carried out against the background of deep inner peace, as a result of which the subject reproduces, "plays out" situations of stress experienced previously, against the background of relaxation (relaxation). This kind of thinking creates a fading effect. Images saturated with affect, as we showed earlier, are gradually freed from emotional content, and their reproduction in consciousness does not cause a stress reaction[4].

When we reproduce a stressful situation against a background of peace, adaptation to such situations occurs, so that when they are repeated, sharp and strong feelings no longer arise.

Thirdly, sanogenic thinking is based on a specific representation in consciousness of the structure of those mental states that are controlled. Thus, thinking about an offense involves knowing how an offense works, what its structure is. This kind of introspection is impossible without knowledge of the basics of the psychology of feelings and personality psychology. To think about how my resentment, my vanity, my shame and my fear work, you must first of all know how these psychological realities generally work. Therefore, we have described in detail the structure of the basic emotions: resentment, guilt, shame, envy, vanity and pride, fear. If you re-read these chapters, you will get material for introspection. Self-observation involves knowledge of the psychological mechanisms of the objects of reflection. Anyone who knows how his offense works can make it an object of introspection and sanogenic thinking. Anyone who does not know this will fail, since he will reproduce in his imagination only images that cause the experience of resentment. Therefore, the study of introspection methods should take place under the supervision of a psychologist-teacher, who helps eliminate gross mistakes that the student initially makes. Only by mastering the basics of sanogenic thinking and acquiring the appropriate mental skills can a person independently continue to work on self-improvement and improvement of his psyche.

Fourthly, mastering sanogenic thinking involves broadening one's horizons and internal culture, which primarily consists of understanding the origins of stereotypes, programs of cultural behavior, cultural history, especially the structure of the archetype. When we think "he acted unfairly," what does that mean? What is justice? Where does our sense of justice come from? This kind of understanding allows us to correctly comprehend the offense that arises from the unfair act

of another. Why did he do this? To answer this question, it is not enough to have an idea of what is fair or unfair. You also need to know what defines behavior in a broad sense in order to understand the specific behavior of another who offends you. If we think about vice or duty, we must understand the true content of these concepts, their internal structure.

Fifthly, sanogenic thinking is impossible without a sufficiently developed level of concentration and concentration on the objects of thought.

The process of introspection is impossible if our attention "floats", is scattered and cannot focus on the mental objects of introspection. Therefore, the formation of sanogenic thinking is a prerequisite for concentration of attention.

The pedagogical process is, first of all, a process of joint activity of two individuals, each of which represents a dialectical unity of the body and mental properties. Therefore, the main thing to begin the process of educating and training a future teacher is to develop the ability to take care of the health of children, in which sanogenic thinking, which represents the interdependence of teachers and students, provides an invaluable service.]. Sanogenic thinking is one of the most reliable methods of healing the soul and body, through mental support of crisis situations that have arisen in a person's life [Orlov Yu.M. Health-improving] leads to the formation of a broad worldview and thinking, new innovative ideas and humanitarian characteristics [].

Sanogenic thinking ("sanos" (lat.) - to heal, heal, console, encourage, put in order and "geno" (lat.) - to heal) is to create a way of thinking that heals, consoles and inspires [Ismailov, reflex, page 47].

Translated from Greek, sanogen means bringing health (sanos - improving health; genos - carrier). In the process of developing sanogenic thinking, students rethink their worldview and opinions, which is carried out in accordance with the improvement and growth of their personal relationships and activities [Kucharova, p.61]. By accepting oneself and accepting other students, sanogenic reflection provides a person with self-confidence, harmony in relationships with other people, and strengthens confidence in the world. The main method for the development of sanogenic thinking is autopsychanalysis of feelings, which is carried out during training aimed at self-awareness and cognition.

In our opinion, sanogenic thinking is designed to activate the internal potential resources of students' personality within the limits of health (voluntary, creative, emotional, social, physical) and ensure the development of positive socio-psychological relationships in various spheres of life and activity. activity; consists in choosing optimal behavior programs.

In any society, in any socio-economic and political situation, the health of young people is an urgent problem that determines the future of the country, the gene pool of the nation, scientific and economic potential. Society, among other demographic indicators, is a sensitive barometer of the country's

socio-economic development[4]. The concept of sanogenic thinking in pedagogical analysis is based on the thesis about the priority of cognitive assessment in relation to pedagogical tasks and emotional experiences arising in connection with the educational process, which is the student's use of his thoughts to influence emotions, and is a process of acquiring skills associated with constructive methods of solving problems of pedagogical activity by changing cognitive assessments [5]. The role of biology in developing such potential of future teachers is incomparable.

Pedagogy is directly and indirectly related to physiology, and physiology is the natural scientific basis of pedagogy and psychology. Human anatomy and physiology are studied as the most comprehensive science among the biological sciences. It is impossible to study the activities of the body without having information about the structure and functions of the body's organs. Especially in pedagogy, pediatric anatomy and physiology, the development of the higher nervous system, the uniqueness of the nervous system, the first and second signaling systems, as well as information about the activity and development of the sense organs, the main motor apparatus, the heart, blood vessels and the respiratory system are described. Knowledge of the physiological foundations of psychological phenomena creates the opportunity for pedagogy to clearly and accurately assimilate and understand some factors of upbringing and teaching, and helps to successfully solve many problems of increasing the efficiency of the educational process.

Heredity, environment and education play an important role in human development. Hereditary characteristics are among the objective factors in the formation of personality. The anatomical structure, physiological movements, type of nerves, basic unconditioned reflexes in the human body are inherited from parents. In modern pedagogy and psychology, the role of biological factors in the development of human personality and behavior is important. Some biogenetic scientists (E. Thorndike) put forward the idea that a human child will have all the signs of a future person even when the mother is young, and some of them believe that consciousness and mental abilities are passed on from generation to generation. Some scientists also associate a person's moral growth with heredity. Consequently, heredity is the anatomical, physiological, psychological aspects that determine the uniqueness of a person, which are transmitted by parents through genetic changes. Of course, one cannot deny the uniqueness of the biological factor in human

formation, but human characteristics - mental and physical abilities for work, thinking and speech can also be inherited, but for the development of these innate abilities, a human child must live among people, have relationships in society must be installed [6].

I.M. Spivak talks about sanogenic features of behavior. In his opinion, sanogenic behavior supports health and well-being as an active way to ensure human development [7, p.470]. Behavior is controlled by thinking and can be divided into two groups: pathogenic and sanogenic. Thus, a person's behavior can have different positive or negative effects on his well-being, mood, health and other aspects of his life. Situational behavior has a positive effect on health and well-being and is sanogenic. On the contrary, behavior that is inappropriate to the situation has a negative impact on a person's life; this behavior is called pathogenic. Pathogenic and sanogenic consequences of individual behavior are associated with unhealthy and healthy lifestyles, respectively.

References

1. Law of the Republic of Uzbekistan "On Education". - Tashkent, 09/23/2020. www.lex.uz.
2. Resolution of the President of the Republic of Uzbekistan dated January 28, 2022 "On the development strategy of the new Uzbekistan for 2022-2026" No. PF No. 60. <https://lex.uz/docs/5841063>.
3. Decree of the President of the Republic of Uzbekistan dated April 29, 2019 No. PF-5712 "On approval of the concept of development of the public education system of the Republic of Uzbekistan until 2030" // <https://lex.uz/documents/-4312785/>
4. Orlov Yu.M. Main features of sanogenic thinking // <https://psy.wikireading.ru/9457/>.
5. Ismailov M.Q. Components of development of sanogenic thinking in students and its pedagogical-psychological features // Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. September 2021. VOLUME 1 | ISSUE 8 ISSN 2181-1784 Scientific Journal Impact Factor SJIF 2021: 5.423. - B. 509-522.
6. Abdullaeva Sh.A., Askarov A.D. General pedagogy. Textbook for bachelors of non-teaching universities. Tashkent-2019. - 359 p.
7. Spivak I.M. The essence and structure of sanogenic behavior from the perspective of the ontological approach to learning // International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD Revista de Psicología, №1-Vol.2, 2013. ISSN: 0214-9877. pp:469-482.

CONTEMPORARY THEATRICAL ART IN THE EDUCATIONAL ACTIVITY OF A TEACHER

Valeria Lobanchuk

Postgraduate of the department of social and cultural activities

St. Petersburg State Institute of Culture

[DOI: 10.5281/zenodo.8364912](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364912)

Abstract

The article discusses the features of theatrical pedagogy in the process of educating children of different ages. The interest of the pedagogical community is manifested in social and theatrical practices, which can become one of the ways to return theater pedagogy to the modern educational process.

Keywords: art, modern theatrical art, pedagogical creativity, theatrical pedagogy, educational activities.

Modern theatrical art is considered in two aspects in the article: as a way of solving the problems of educating students and as a means of preparing future teachers to solve educational tasks (theater pedagogy). At the same time, educational activity is understood in terms of the position of a culturological approach as a purposeful activity of a teacher acting as an intermediary between a child and culture to involve students in the context of modern culture.

Undoubtedly theatrical art has a high educational potential and is favorable for the effective informal implementation of educational tasks. In the system of additional education of artistic orientation, the activities of theatrical creative associations have a rich history. The educational process of the theater collective has always been aimed at introducing children to the best traditions of literature and art, the best examples of theatrical culture, at fostering a moral attitude, at educating the child's personality.

A considerable number of scientific works in the field of pedagogy and psychology are devoted to the problems of upbringing and education by means of theater. The effectiveness of the use of theatrical pedagogy in the process of teaching and educating children of different ages, including adolescents, is proved in the works of V. M. Bukatov, N. S. Vladimirova, A. P. Ershova, A. B. Nikitina, E. K. Chukhman, A. V. Grebenkin, O. S. Zadorina, etc. The studies of O. N. Antonova, I. J. Generalova, T. G. Penya, as much as Ya. Mikhailova, L. M. Nekrasova, M. P. Stul and others are devoted to the education of general culture by means of the theater.

Teachers should introduce mandatory interaction with art into the life of the child, not as a separate and rare event, but as a permanent and mandatory element of education. Interaction with art, the author continues, is not a simple informational accumulation of knowledge. Art is always the communication of a person with people through an artistic image, it is necessary to figure out together with children what it is: what does it tell us? what is amazing? what worries you? Why did the artist take a pen, a brush? And most importantly: how life is reflected in this work [9, p. 59].

It should be clarified that "school theater pedagogy", being a part of theater pedagogy, has its own goals that differ from the goals of theater pedagogy. If the goal of theater pedagogy is the professional training of actors and directors, then by "theatrical work with

children", or "school theater pedagogy", we mean "education of the student's personality by means of theatrical art". The main goal of school theater pedagogy is "the development of imagination and imaginative thinking of the student", his/her attitude to life, to himself/herself, to another person, and hence the development of his personality [2, p. 37].

In a modern school, traditional forms of theatrical work with a younger generation are becoming less and less demanding. School theaters and drama clubs are a thing of the past as archaic forms of extracurricular educational work. There are several reasons for this situation: the virtualization of society, the strengthening of the influence of information and communication technologies. A modern teenager is under the influence of social networks and computer games, he no longer wants to be just a passive observer and contemplator, he wants to influence the course of events.

One of the reasons for the decline in the pedagogic and educational influence of the theater on schoolchildren is the unwillingness and inability of professional teams to work with teenagers in new socio-cultural conditions, when interest in traditional forms of art which can also include theaters. In most professional theaters for children and youth, there is no teacher in the staff schedule who could take the organization of interactive theater practices that are so in demand in adolescence. But most importantly, the professional theater community needs to learn how to talk to children and teenagers honestly and not be afraid to raise modern problems.

The involvement of the viewer and participant in the creative process, where the performance (or any other theatrical form) is born here and now, where improvisation and unpredictability are fully an integral part of the performance, can become one of the ways to return theatrical pedagogy to the modern educational process. The possibility of using theatrical pedagogical technologies in working with teenagers, which contribute to the formation of stage improvisational skills, will undoubtedly contribute to their successful socialization [4, p.6].

It is known that factors such as genetics, social environment, culture and individual experience influence the development of personality. Self-determination, according to S. L. Rubinstein (a soviet psychologist and philosopher), is "the search by a subject for his way of life in the world on the basis of perceived, accepted or formed by him in a time perspective basic relations to the world, other people, the human community as a

whole and to himself, as well as on the basis of his own system of life meanings and principles, values and ideals, opportunities and abilities, expectations and claims."

The period of emergence of the conscious "I" is adolescents and young people, therefore it is necessary to take into account that inclusion in various communities (fitting different social roles) contributes to building a set of values and guidelines, and at the same time understanding life issues, prudence and motivation necessary for successful personal development.

It is possible to directly influence the motivational, emotional-imaginative and intellectual-creative sides of the personality of students using the means of this pedagogy. In theatrical art, there is no contrast between the emotional-figurative and the intellectual-logical [6, p.109].

Modern theatrical art has a number of features that make it in demand both in the process of preparing future teachers for educational activities and in solving educational tasks at school. Among such features, the most significant in the context of education are the following:

- the brightness and originality of the works of modern theatrical art attract the attention of both students and schoolchildren. The catchy, unusual external form stimulates interest in the inner content of the works, makes you think about the spiritual, moral, social problem underlying the theatrical action, creates an emotional mood necessary for its serious and thoughtful discussion;

- minimalism, characteristic of many modern performances, allows you to focus not on the aesthetics of the design of the performance, but on the essence of the underlying conflict, which is especially important when solving problems of spiritual and moral education;

- a large selection of genres and trends in the field of modern theatrical art (solo performances, musicals, documentary theater, performance and much more) allows you to take into account the individual capabilities of students when choosing a performance for viewing, discussion or staging by students;

- the interactive nature of modern theatrical art, which allows schoolchildren to formulate, justify and defend their own moral position, and future teachers to "play" various situations of professional activity in the field of education, develop their creative abilities, the ability to interact with strangers in non-standard conditions in the mode of improvisation. Many modern theatrical productions belong to the so-called immersive art. Such performances contain elements of a quest, a musical, and include computer game plots. The audience are active participants and co-creators of the action, can choose one of several storylines;

- a special organization of the space of the modern theater, which allows the audience not only to actively participate in the theatrical action, but also to hear the actors' replicas better, see the details of their costumes, gestures, facial expressions and as a result – to understand their feelings and experiences more deeply.

Of course, there are also elements in modern theatrical art, the use of which is unacceptable when solving educational tasks. Violation of moral taboos, the use of obscene vocabulary, anti-value content – all this is the basis for excluding the work from the context of education.

Thus, students develop the ability to feel empathy, to an adequate external expression of emotions; a combination of artistic and creative activities and computer technologies in modern theatrical productions, adequate to the worldview of representatives of the younger generation and allowing them to better understand the basic idea of the performance.

Modern domestic and foreign researchers consider theatricalization as a phenomenon of modern life, as part of modern reality. This approach seems to be very promising from the point of view of the principle of the connection of education with life [3, p.60].

Theatrical experience in educational organizations successfully helps students in this cognitive process. Firstly, the theatrical form (like any "game") tends to interest and involve a large number of students in the process. Secondly, this form implies the need for communication, the disclosure of creative (and, accordingly, personal) potential, and also develops the independent thinking and understanding of the problems posed in the performance necessary for self-determination. Taking the role of another person in theatrical activity, acting on his behalf, a teenager learns both himself and the "other", which ultimately contributes to the development of his self-consciousness [5, p.46].

Thus, it can be concluded that modern forms of theatrical art (social theater, forum theater, etc.) can bring theater back into pedagogical practice as an effective method of teaching and upbringing. Theater pedagogy educates a teenager and prepares him for life in a modern society that imposes certain requirements. New theatrical and social forms of work with the younger generation require teachers to rethink the goals and objectives of pedagogical activity, the main of which is the formation of social activity in the subject of the pedagogical process. It is necessary to provide freedom of choice and teach to make decisions about certain actions on the basis of moral consciousness. The ultimate goal of education is the formed active life and creative position of the student, which is expressed in the development of the basic values of modern Russian society.

From the point of view of the organization of educational activities, such features of modern theatrical art as originality, the predominance of ideological content over external design, interactive nature, strengthening of "virtuality" through the use of computer technology are significant.

References

1. Galchuk O.V. Theater Pedagogy in Modern Innovative Education: Society. 2019. No. 2 (2). pp. 53-55.
2. Portnova T.V. Traditions and innovations in the pedagogy of theatrical art on the example of foreign countries: Moscow, 2019.-138 p.

3. Solovtsova, I. A. Features of the perception of contemporary art by a school teacher: assessments, judgments, level of competence / I.A. Solovtsova, A.I. Shipitsin // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Social, humanitarian. Medical and biological sciences. - 2021. - Volume 23, No. 76. - S. 57-63.
4. Smirnova I.V. The role of theatrical pedagogy in the educational process of the modern school / Zemlyanikina E.V., Ganysh N.P./Secondary vocational education. 2021. No. 12 (316). pp. 6-11.
5. Stepanova Yu.V. Reflexive-polylogical directions in the development of education: theater pedagogy and pedagogy of co-creation
Journal of Educational Research. 2019. V. 4. No. 2. S. 43-52.
6. Yakusheva Svetlana Dmitrievna Fundamentals of pedagogical skills and professional self-development: textbook. allowance / S. D. Yakusheva. - 2nd ed., erased. - M.: Forum; Infra-M, 2018. - 405 p.

PHILOLOGICAL SCIENCES

THE IMAGE OF A DOLL IN FOREIGN AND KAZAKH LITERATURE

Orazbek M.S.

Doctor of Philology, Professor of L.N. Gumilyov Eurasian National University, (Astana, Kazakhstan)

Sagynadin G.S.

PhD in Philology, Senior lecturer of L.N. Gumilyov Eurasian National University, (Astana, Kazakhstan)

³**Sagidulliyeva S.S.**

PhD student of L.N. Gumilyov Eurasian National University,

(Astana, Kazakhstan)

[DOI: 10.5281/zenodo.8364914](https://doi.org/10.5281/zenodo.8364914)

ШЕТЕЛ ЖӘНЕ ҚАЗАҚ ӘДЕБИЕТІНДЕГІ ҚУЫРШАҚ ОБРАЗЫ

Оразбек М.С.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің профессоры, филол.г.д. (Астана, Қазақстан)

Сагынадин Г.С.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің аға оқытушысы, PhD доктор (Астана, Қазақстан)

Сагидуллиева С.С.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің докторантты, (Астана, Қазақстан)

Abstract

One of the features of urban children's prose reflects the worldview and psychology of children by describing their toys. In domestic and foreign children's literature, one can observe a special interest in the images, characters and activities of children's toys of various types. The article considered the way of presentation, description of the image of a doll in children's literature. A comparative analysis of foreign literature and Kazakh literature was carried out in order to identify the author's specifics, the final idea of describing the image of a doll. Through the image of the doll, the concepts of family value, upbringing of children, perception of social phenomena were also revealed.

Андатпа

Қалалық балалар прозасының бір ерекшелігі балалардың ойыншықтарын суреттеу арқылы олардың дүниетанымы мен психологиясын бейнелейді. Отандық және шетелдік балалар әдебиетінде әртүрлі типтегі балалар ойыншықтарының бейнелеріне, кейіпкерлеріне және қызметіне ерекше қызыгуышылықты байқауға болады. Мақалада балалар әдебиетіндегі қуыршақ образының берілуі, суреттелу тәсілі қарастырылды. Қуыршақ образын суреттеудегі автор ерекшелігі, түпкі идеясын анықтау мақсатында шетел әдебиеті мен қазақ әдебиеті салыстырмалы талданды. Қуыршақ образы арқылы отбасылық құндылық, бала тәрбиеси, қоғамдық құбылыстарды қабылдау түсініктері де анықталды.

Keywords: Children's literature, foreign literature, puppet image, national cult.

Кітт сөздер: Балалар әдебиеті, шетел әдебиеті, қуыршақ образы, ұлттық культ.

* *Мақала ҚР Ғылым және жыгары білім министрлігінің Ғылым Комитеті қаржыландырган 2023 жылғы «03» тамыздагы №269-23-25 келісімшарт бойынша AP19679524 «Қазіргі қазақ прозасындағы қалалық балалар типологиясы және ұлттық ментальдік (агылышын әдебиеті мен қазақ әдебиеті шығармаларын салыстыру» тақырыбындағы ғылыми жоба бойынша орындалды.*

* *The article was carried out under the contract № 269-23-25 dated August 03, 2023, funded by The Science Committee of the Ministry of Science and higher education of the Republic of Kazakhstan on the scientific project AP19679524 – "Typology of urban children and national mentality in modern Kazakh prose (comparison of English and Kazakh literature)".*

Кіріспе. Қалалық прозасынң бір ерекшелігі қала мәдениетін суреттеуде қалалықтардың рухани қызыгуышылығын, олардың бос уақытында айналысатын ойын-сауық түрлері мен ермегін бейнелеп көрсету екені ақиқат. Ал қалалық балалар өмірін бейнелейтін шығармаларда бала ойыншығын суреттеу негізгі атрибут болып саналады. Қазіргі таңда зерттеушілер отандық және шетелдік балалар әдебиетінде әртүрлі типтегі балалар ойыншықтарының бейнелеріне, кейіпкерлері мен функцияларына ерекше қызыгуышылықты байқауға болатындығын атап көрсетеді. Фалым А.В. Мироновтың айтуы бойынша, «жазушылар, балалар кітабының дизайнерлері, сондай-ақ балалар әдебиетінің баспагерлері арасында ойыншық образына деген қызыгуышылық тарихи тұрғыдан біркелкі емес. Бұл

эсіресе балалар әдебиетінде мәдени, идеологиялық, педагогикалық көзқарастардың өзгеруіне байланысты белгілі бір қоғамдық идея пайда бола бастаған кезде айқын көрінді» [1, 133 б.]. Европа әдебиетінде Романтизм дәүірінде, XIX ғасырдың бірінші жартысында, ойыншық әлемі жұмақтың бір түрі ретінде пайда болды; кейінрек, реализм дәүірінде ойыншық балалар белмесінің интерьєрінің болігі ретінде қабылдана бастады.

Европа елдерінің әдебиетінде және Америка әдебиетінде ойыншықтар, оның ішінде қуыршак бейнесі XIX ғасырдың бірінші жартысында неміс жазушылары Ганс Христиан Андерсеннің, Эрнст Теодор Гофманнның, италиян жазушысы Карло Коллоди және американцы жазушы Лаймен Фрэнк Баум шығармаларында көрініс тапты. Осы кезден бастап ойыншықтар балаларға арналған шығармалардың тәуелсіз және негізгі кейіпкерлеріне айналды.

Қала мәдениеті ерте қалаптасқан Европа, Қытай, Түркия, Жапония сияқты елдерде қуыршак мәдениет пен өнердің әртүрлі салаларында өзекті мәселелерді көтеретін образ ретінде суреттеледі. Қуыршакты концерттердің, театр қойылымдарының, саяси телешоулардың, көркем көрмелердің қабыргаларынан тамашалап келеміз. Бұл жағдайдағы қуыршак образдары адамның жеke басының көрінісі, жалпы қоғамның негізгі құндылықтарын қайталайды.

Ю.М. Лотманнның зерттеулерінде қуыршак образының екі түрін көрсетеді: бірі – ойыншық қуыршак болса, екіншісі – модель қуыршак. Бірінші типтегі қуыршактың ролі ересек адамды өткен балалық шағын есіне түсіреді, фольклорлық мотивтерді қамтиды. Ю.М. Лотман қуыршак образының берілуінде автор-мәтін-окырман арақатынасында екі түрлі түсінуге болатынын айтады. Біріншісі, үлкен адам ретінде, екіншісі кішкентай бала, фольклорлық, архаикалық типте. Үлкен адам қуыршакты ұстауға болмайтынын, сюжетке араласуға болмайтынын түсінеді, ал кішкентай бала ретінде қуыршакпен ойнайды, ұстайды, рөлге бөледі. Бұл тек оқырманның мәтінді қабылдаудынан көрінеді.

Қуыршак бейнесінің екі жақтылығын Ю.М. Лотман былайша сипаттайды: «...біздің мәдени санамызда қуыршактың екі образы пайда болды: бірі балалық шақтың әлемінен шақырады, екіншісі жалған өмірмен, өлі қозғалыспен, өліммен, өзін өмір ретінде көрсетумен байланысты. Біріншісі фольклор, ертегі, қарабайыр әлемге қарайды, екіншісі машина еркениетін, иеліктен шыгаруды, қосарлануды еске түсіреді» [3, 379 б.]. Дегенмен, қуыршак ең алдымен, балалық шақ, фольклор, мифологиялық және ойын әлемі туралы естеліктерді өзімен бірге алып жүретін образ.

Материалдар мен әдістер. Зерттеу барысында ғылыми жұмыс тақырыбына қатысты ғылыми-теориялық, философиялық әдебиеттерді талдау және жинақтау, лингвопсихологиялық тұрғыдан талдау, компаративистік, топтастыру, салыстыру, әдістері колданылды.

Көркем мәтінді герменевтикалық талдау арқылы, қуыршак образына тән шетелдік және қазақ қаламгерлері туындыларынан мысал келтіріп, түсіндіру негізінде талданды.

Талдау. Әлемдік көркем әдебиеттің көптеген шығармаларында кейіпкердің қасында қуыршак образын суреттейді.

Кейіпкерлердің қуыршакқа деген көзкарасы олардың мінезін және моральдық-адамгершілік құндылықтар жүйесінің қалыптасуын ашады. Э. Гофманнның «Щелкунчик және тышқан патшасы» ертегісінде қуыршак жаңғақтарды бөлуге арналған құрал болып табылады. Басты кейіпкер Мари Щелкунчикке үқыпты және қамқорлықпен қарайды. Оның ағасы Фриц ойыншықты дөрекі түрде мазақ етеді.

Э.Гофман, Х.Андерсен, К.Коллоди, А.Толстой ертегілерінде ойыншық кейіпкерлерге жан біту, тірілу мотиві бар. Х.Андерсеннің «Дюмовочка» ертегісіндегі түймедей ойыншық сияқты қыздың өмірге келуі мен басынан өткен шым-шытырақ оқиғалары, Карло Коллодидің ағаш ойыншық Пиноккиосы, 1923 жылы Берлинде эмиграцияда жүрген орыс жазушысы Алексей Толстой өндеп, сюжетін толықтырып, орыс тіліне аударған «Буратиносы» мен «Ақша қар» (Снегурочка), қазақ әдебиетіндегі «Құйыршық» ертегілерінде материалдық затқа жан бітіру мотиві тән. Бұл шығармаларда ерекше жаратылған балалардың болмысындағы қайырымдылық, қайсарлық немесе балаға зар болып жүрген ата-ананы қуанту, жалғыздықтан құтқару, бақытқа бөлеу идеясы жатқанын аңғарамыз. Себебі олар тек ойыншықтың ғана ролін атқармайды, ерекше ақыл иесі, картайған ата-ананы жалғыздықтан құтқарушы, айналасына қамқоршы болуымен еркшеленеді. Демек, аталған Қуыршак кейіпкерлер адам өміріне мән-мағына кіргізуімен, қуаныш сыйлауымен де өзгеше мәнге ие.

Әлемдік әдебиетте бір заттан немесе басқа бір нәрседен пайда болған қуыршак тәрізді кейіпкерлерді суреттеу кездеседі. Әдетте оларға жан біту, тірілу мотиві тән.

Х.Андерсеннің «Дюмовочка» ертегісінде бір балаға зар болған әйел сиқыршыға барып жүріп, түймедей болса да бала керек деген арманын жеткізеді. Ал сиқыршы оған арпа дәнін береді. Үйіне келіп құмыраға өсірген арпа дәнінен екі жапырақ пен нәзік сабақ өсіп шығады. Ал сабақта қызғалдақ тәрізді үлкен тамаша гүл пайда болды. Бұл шын мәнінде үлкен қызғалдақ болды, ал гүлдің тостағанында тірі қыз отырды. Ол кішкентай, түймедей ғана болғандықтан Дюймовочка деген атқа ие болды.

Стол үстіндегі грек жаңғақының қабығындағы бесігінде жатқан Дюмовочканы терезеден кірген ұсқынсыз, көрі бақа алып кетіп, одан әрі қарай түймедей қыздың басынан шытырман оқиғалар өтеді. Ұсқынсыз бақадан құтылған Дюймовочка қоныздарға тап болады. Одан құтылған кезде дала тышқанына және қорқынышты кротқа кез болды. Бірақ түймедей қыз бар қындықты өзінің мейірімді, қайырымдылығымен, төзімділігімен

женіп шығып бакытқа жетеді. Х.Андерсен күйршак тәрізді, ұлбіреген нәзік кейіпкері арқылы киындықты жену адамның алыштығына немесе орасан күшке ие болуындаға емес, ақылы мен қайратына байланысты деген авторлық позициясын танытады.

Қазактың «Күйршық» ертегісіндегі кейіпкердің тірілу, жан біту мотиві Х.Андерсен ертегісіне ұқсас деп батыл айта аламыз. Бір балаға зар болған шал мен кемпірдің бес ешкісі мен бір кара нарыға болған екен. Бес ешкісін сауып күн көрген кемпір мен шалдың бір ешкісі сауғызбай қаша береді. Бір күні ұстаптай қашып жүрген ешкінің күйршығын шал жұлып алышты. Жұлынған күйршықты шал киіз үйдің жабынына тыға салады. Қундердің күнінде сүт пісіріп отырған кемпір сүттің қаспағын жейтін бір бала бермедин деп құдайға ренжіп отырғанда, «қаспақ жейтін мен бармын» деп кіп-кішкентай күйршық жетіп келіпти. Қатты қуанған кемпір мен шалдың ермегі күйршық болады. Қара нардың құлағының арасына отырып алыш, тұз әкелуге барған күйршық қайтар жолда жаңбыр жауып, ұлкен жапырақтың астын панарап отырғанда жапырақпен қоса жеп қойған қара нардың қарнына түсіп, одан нарды сойғанда оның ішек-қарның жеген қасқырдың ішіне түсіп, басынан тұра Дюмовочка сияқты шытырман оқиғаларды өткізеді.

Кіп-кішкентай күйршық ақылы мен қайрымдылығының арқасында бар қиындықтан құтылады. Бұл ертегілерде ойыншық сияқты қыз бен баланың жаратылу, тірілу құбылысы балаға зар болған адамдарға ойыншық тәрізді ермек болу мотивін көрсетеді. Екі ертегінің де кейіпкерлері ата-анасынан адасу, киындықта ұшырау, катыгез хайуандарға кездесу мотиві, қорқынышты, шытырман оқиғага тап болу мотиві де ұқсас десек қателеспейміз.

Э.Гофман ертегісіндегі Щелкунчик жасалған материал – ағаш. Оның негізгі қасиеттері – берік, еңделетін, жанды. Бұл рухани тәртіптің қасиеттері, ейткені кейіпкер физикалық түрде ауырсынуды, сұқыты, шаршауды сезінеді. Ертегінің соңында идеал бұл – сұлулық пен үйлесімділік емес, табиғатқа тән жақсылық пен тәзімділіктің басталуы. Карло Коллодидің «Ағаш күйршактың тарихы. Буратиноның шытырман оқиғасы» ертегісінде де ағаш адам – бұл ағаштан жасалған күйршак. Ол басқалардың билігіне бағынудан бастарады, Буратиноның мінезінде кез-келген міндеттеме мен міндеттерге қарсылық пайда болады. Еркіндік үшін күреске ұмтылып, ерекше ерік-жігерге ие болады. Кейіпкер өтірік айтқан кезде Буратиноның мұрны үлкейеді. Коллоди осылайша өтірік адамды еркіндіктен айыратының көрсеткісі келді деп ойлаймыз. Өтірік оны күйршак сияқты басқара бастайды. Бұл идея Коллоди ертегісінде жасырылған негізгі идеялардың бірі.

Ганс Христиан Андерсенниң «Қалайы сарбаз», «Қойши және мұржаны тазарту» ертегілерінде күйршактар ойыншық болуды тоқтатпайды, жандану немесе өзгеру болмайды, бірақ Андерсенниң поэтикасына тән қосарлылық үнемі

көрінеді. Ол қуыршақтарға адами қасиеттер беріп қана қоймай, ойыншықтағы адамды «ойыншықтан» жогары қояды.

Қазақ әдебиетіне қуыршақ образы XX ғасырдың басынан бастап ене бастады. Б.Майлин шығармаларынан кездестіреміз. Қазақ қаламгерлерінің шығармасында қуыршақ образы мифологиялық, ойын рөлінде суреттеледі. Оған Сапарғали Бегалиннің «Бала Шоқанында» Мысықтың саз балшықтан мүсін жасап ойнайтыны, Бейімбет Майлиниң «Талақ» әңгімессінде Құләмзаның қуыршақпен ойнауы, Қадыр Мырзалиевтің «Балшықұлы Балшықбай», Мадина Омарованиң «Кемпір», «Күзгі бір кеште», Мира Шүйіншәлиеваның «Шуберек қуыршак» т.б. шығармалары дәлел.

Қазақ әдебиетінде ойыншық бейнесін суреттеу арқылы жазушылар отбасы мәселесі мен бала тәрбиесін суреттеуді көздейді. Бейімбет Майлиниң «Талақ» әңгімессінде Құләмзаның қуыршаққа жабын жауып ойнауы баланың отбасылық рөлдегі ойының, идеал отбасына ұмтылуышылық әрекетін суреттейді. Фалымдардың зерттеуінде бала қуыршақ ойыны арқылы өзінің үлгілі отбасын қалыптастырады, сонымен қатар, Құләмзаның бойындағы аналық, мейірімділік сезімдерін де береді. Қуыршақпен ойнап отырған Құләмзенің анасы: «- Таста әрі, ку қатын, қатын болмай қалармын деп корқасын ба! - деп Зейнеп қуыршақты лактырып жіберді» [2, 105 б.] деген детальдан қазақ отбасындағы әйелдердің есіп, жетіле бастаған жас сәбиге дөрекі сөздер айтуды бала тәрбиесіндегі олқылықты, қазақ әйелінің білімсіздігін анық көрсеткенін байқаймыз. Қуыршак адамда физикалық, психологиялық және дуниетанымдық қабілеттерді қалыптастырады. Ғұрыптық қуыршақ – халықтық педагогиканың қуатты құралдарының бірі, өмірлік тәжірибелі жеткізу құралы.

Й.Хейзингиннің анықтамасында: «Ойын ерікті түрде өзінің шекарасы мен уақытын қабылдау арқылы іске асатын іс-кимыл немесе ойын арқылы ішкі қуаныш, тіршілікті қабылдау сезімдерін білдіретін құнделікті тіршіліктен бөлек болмысты қамтитын ерікті әрекет» деп көрсетеді [5, 41 б.]. Құләмзаның қуыршақпен ойнауы, жабын жапқанына қуануының өзі құнделікті тіршіліктен басқа болмысты беруін суреттейді.

Қадыр Мырзалиевтің «Балшықұлы Балшықбай» атты ертегісінде Айбала балшықтан қуыршақ жасап, жан бітіреді. Бұл шығармада да затқа жан біту, тірілу мотиві бар екенін көреміз. Балшықбайдың балаға тән ессіздік, тентектігін бейнелейді. Шығарма соңындаға Балшықбай балаларға тәртіпті болуды насиҳаттап, жақсылыққа бағыттайты. Қуыршаққа жан бітіру мотивін мифтік тұрғыдан түсініміз керек. Ежелгі кезеңде табылған қуыршақтарды еске түсірер болсақ, адам қуыршақты қозғалу қабілетімен қамтамасыз етуге деген ұмтылысын ғана емес, сонымен қатар қуыршақтың жанды өмір көрінісін беруге тырысқанын көреміз. Қадыр Мырзалиевтің

«Балшықұлы Балшықбай» ертегісінде адам жаратушы, өмірді жасаушы тақырыбын қозгайды.

Мадина Омарованаң «Кемпір» атты әңгімесінде бас кейіпкер қуыршақты бөлесі ретінде бағып, тілдеседі. Әңгіменің аяқ соңында ғана кемпірдің жөргегін алмастырып, кеудесіне басып бағып жүргені қуыршақ екенін білеміз.

Нұрлан Құмардың «Куыршақтар» әңгімесінің мотиві өзгеше. Қуыршақты қала балаларының интеллектісін, білімін көрсететін құрал ретінде суреттейді. Кешкілік аулаға жиналған қыздар қуыршақтары жайлы әңгімелей бастайды. Сонда Әсел атты қызы Барби қуыршағының шығу тарихын айтып береді. Жазушы қазіргі балалардың қуыршақты ойын құралы ғана емес, оның қандай елде өмірге келуі туралы мәселелер қызықтыратынына көз жеткізеді. Сондай-ақ қыздардың бірі қуыршағының қытай, жапон елдерінде жасалғанын айтып отырып «Шіркін, Қазақстанда да қуыршақ жасайтын фабрика болса гой. Ертегілердегі батырлардың бейнесі ойыншық болып жасалса!» [4] деген арманын айтып қалады. Демек, жазушының бала арманы арқылы Қазақстанда ұлттық кейіпкерлерді жасайтын ойыншық фабрикасы болса деген авторлық позициясын айқын анғарамыз. Автор қыздардың қуыршақ тарихы туралы әңгімесі арқылы және ойыншық жасайтын Қазақстандық фабриканы армандауы арқылы ойыншықтың ұлттық мәдениетті, ұлт болмысын әлемге танытатын құрал екендігін еске салады.

Жалпы, тәуелсіздік жылдары жарық көрген туындыларда қуыршақ образы арқылы қоғамда орын алған отбасы тәрибесі, жанұя арасындағы карым-қатынас, тек пен гендік мәселелер көтерілген. Баланың ойыншығы қуыршақ қоғамдық әлеуметтік мәселелерді көтерудегі қосалқы затқа айналғанын көреміз.

Қорытынды. Салыстырмалы түрде қарайтын болсақ, шетел әдебиеті мен қазак әдебиетінде де қуыршақтың ойыншық, бөлме интерьери немесе

мифтік образдар ретінде суреттеледі. Шетел әдебиетінде қуыршақтың формасы, жасалынған материалдарына қарай түрлері көп болса, қазақ әдебиетінде осы жағынан кем түсіп тұр. Оған ұлттық болмыс пен дәстүрдің әсері бар екенін де көреміз.

Қуыршақ – балаларға арналған ойыншық, бірақ оның рөлі керемет. Ол адами құндылық және бұл бізді адам етеді. Қуыршақ адамға өзінің жеке касиеттерін түсінуге мүмкіндік береді. Ол тірі емес, бірақ балалардың қолында қуыршақ «өмірге келеді», бала осылайша ойын арқылы «өмір» деп аталатын ғылымды түсінеді.

Қуыршақ – мәдениеттің ерекше пәні, адамның прототипі, ол әлемдік мәдениетке тән дүниестанымдық принциптер мен негізгі құндылықтарды көрсетеді.

Пайдаланылған әдебиеттер

1 Миронов А.В. Жизнь замечательных игрушек: трансформация образов животных-игрушек в российской литературе// Детская книга о живой природе: познавательные, нравственные и эстетические аспекты: м-лы V Всерос. науч.-практ. конф. – Нижний Тагил: Нижнетагильская гос. соц.-пед. академия, 2012. – С. 133–143.

2 Майлин Б. Қөп томдық шығармалар жинағы. Бірінші том: әңгімелер. – Алматы: «Қазығұт», 2003. – 584 б.

3 Лотман Ю.М. Куклы в системе культуры// Изб. ст.: в 3 т. – Т. 1. Статьи по семиотике и типологии культуры. – Таллинн: Александра, 1992. – С. 377–380.

4 Құмар Н. «Куыршақтар»// <https://baldyrgan.kazgazeta.kz/news/33472> (карады: 9.09.2023)

5 Хейзинга, Й. Homo ludens. Человек играющий. Опыт определения игрового элемента. – Санкт-Петербург: Изд-во Ивана Лимбаха, 2011. – 416 с.

Nº47 2023

Annali d'Italia

ISSN 3572-2436

The journal is registered and published in Italy.

Articles are accepted each month.

Frequency: 12 issues per year.

Format - A4 All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

Chief editor: Cecilia Di Giovanni

Managing editor: Giorgio Bini

- Hoch Andreas MD, Ph.D, Professor Department of Operative Surgery and Clinical Anatomy (Munich, Germany)
- Nelson Barnard Ph.D (Historical Sciences), Professor (Malmö, Sweden)
- Roberto Lucia Ph.D (Biological Sciences), Department Molecular Biology and Biotechnology (Florence, Italy)
- Havlíčková Tereza Ph.D (Technical Science), Professor, Faculty of Mechatronics and Interdisciplinary Engineering Studies (Liberec, Czech Republic)
- Testa Vito Ph.D, Professor, Department of Physical and Mathematical management methods (Rome, Italy)
- Koshelev Andrey Candidate of Philological Sciences, Associate Professor, Faculty of Philology and Journalism (Kiev, Ukraine)
- Nikonorov Petr Doctor of Law, Professor, Department of Criminal Law (Moscow, Russia)
- Bonnet Nathalie Ph.D (Pedagogical Sciences), Faculty of Education and Psychology (Lille, France)
- Rubio David Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Barcelona, Spain)
- Dziedzic Stanisław Ph.D, Professor, Faculty of Social Sciences (Warsaw, Poland)
- Hauer Bertold Ph.D (Economics), Professor, Department of Economics (Salzburg, Austria)
- Szczepańska Janina Ph.D, Department of Chemistry (Wrocław, Poland)
- Fomichev Vladimir Candidate of Pharmaceutical Sciences, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)
- Tkachenko Oleg Doctor of Psychology, Associate Professor (Kiev, Ukraine)

and other experts

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal. Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

500 copies

Annali d'Italia

50134, Via Carlo Pisacane, 10, Florence, Italy

email: info@anditalia.com

site: <https://www.anditalia.com/>